

## Modèles démographiques

Thomas Malthus est un économiste britannique ayant vécu peu avant la révolution industrielle. S'intéressant aux évolutions conjointes des moyens de production et de la population anglaise, il publie en 1798 un ouvrage dans lequel il prédit une véritable catastrophe démographique : si la population continue de croître exponentiellement, les ressources, qui croissent de façon linéaire, finiront par manquer. Il prône alors le contrôle des naissances et d'autres mesures extrêmes, afin d'éviter cette insuffisance.

Que signifient ces modèles de croissance ?

« Comptons pour 11 millions la population de la Grande-Bretagne et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de 22 millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir.[...] La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 [...]. »

Thomas Robert Malthus, *Essai sur le principe de population*, 1798.

### Modèle exponentiel

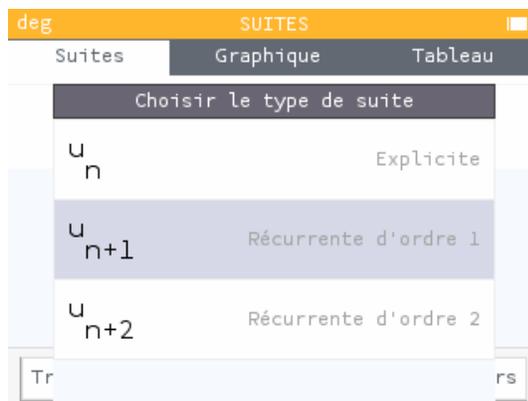
1. On s'intéresse en premier lieu à la croissance de la population humaine.
  - (a) On appelle  $u(0)$  la population initiale de la Grande-Bretagne dans le raisonnement de Thomas Malthus. Quelle est la valeur (en millions) de  $u(0)$  ?
  - (b) D'après le texte, 25 ans plus tard, la population est alors de 22 millions. On note  $u(1)$  cette valeur (en millions). Quelle semble être la relation mathématique entre  $u(0)$  et  $u(1)$  ?
  - (c) Quel extrait du texte semble affirmer ou infirmer ce raisonnement ?
  - (d) Toujours en suivant la logique de Malthus, quelle devrait être la valeur de  $u(2)$  ? Combien d'années se sont alors écoulées depuis la valeur initiale ?

Lorsqu'il est question d'une suite de nombres liés les uns aux autres par une multiplication par un même réel, on parle alors de **suite géométrique**.

Soit  $n$  le rang d'un nombre dans la suite numérique,  $n + 1$  le rang du nombre qui le suit immédiatement et  $q$  le réel qui, multiplié, permet de passer de l'un à l'autre (et que l'on appelle **raison**). La relation qui relie ces termes est donc de type :

$$u(n + 1) = q \times u(n)$$

2. On souhaite connaître l'évolution de cette suite en utilisant la calculatrice.
- (a) Pour calculer les termes suivants de la suite à l'aide de la calculatrice, il faut utiliser l'application du même nom. On sélectionne la cellule **Ajouter une suite** puis  $u_{n+1}$  (récurrente d'ordre 1).



- On attend en première ligne l'expression de  $u(n+1)$  en fonction de  $u(n)$ , soit  $u(n+1) = q \times u(n)$ . Quelle est la valeur de la raison  $q$  dans le cas étudié ? En déduire l'expression à indiquer dans la calculatrice.
- (b) En seconde ligne, on attend la valeur initiale, c'est-à-dire la valeur du premier terme  $u(0)$ . Rappeler cette valeur dans notre exemple et compléter la formule sur votre calculatrice.
- (c) L'onglet Graphique permet d'obtenir une représentation graphique des différents termes de la suite. On peut zoomer sur l'écran avec la touche  $(+)$ , dézoomer avec la touche  $(-)$  et naviguer sur l'écran après avoir sélectionné la cellule **Naviguer**.  
Que peut-on dire sur l'évolution de cette suite numérique ?
- (d) Les valeurs des différents termes de la suite sont indiquées en bas de l'écran. Ces valeurs sont aussi rassemblées dans un tableau dans l'onglet du même nom. Quelle est la valeur de  $u(8)$  ? Combien d'années se sont alors écoulées depuis la valeur initiale ? Que penser de cette prévision ?

Ce type de modèle mathématique, suivant une suite géométrique, est appelé **modèle exponentiel**.

## Modèle linéaire

- Pour Malthus, la croissance de la population britannique suit un modèle exponentiel tandis que l'évolution des ressources suit, elle, un modèle linéaire.  
Retrouver dans le texte la signification d'un tel modèle. Quel type d'opération mathématique permet de passer d'un nombre à l'autre ? Quelle est la différence avec le modèle précédent ?
- Dans l'explication de Malthus, les ressources initiales sont suffisantes pour assurer la subsistance de la population, on pose donc  $v(0) = 11$ . Une période plus tard, on a  $v(1) = 22$ . Quelle relation mathématique existe-t-il entre ces deux termes ? Attention au type d'opération mathématique à utiliser ici !

Lorsqu'il est question d'une suite de nombres liés les uns aux autres par une addition par un même réel, on parle alors de **suite arithmétique**.

Soit  $n$  le rang d'un nombre dans la suite numérique,  $n + 1$  le rang du nombre qui le suit immédiatement et  $r$  le réel qui, additionné, permet de passer de l'un à l'autre (et que l'on appelle **raison**). La relation qui relie ces termes est donc de type :

$$v(n + 1) = r + v(n)$$

3. En utilisant les réponses précédentes, en déduire les informations à indiquer dans la calculatrice pour ajouter cette suite dans l'application (sans supprimer l'autre). Que peut-on dire sur sa représentation graphique, comparativement au modèle précédent ?
4. Dans quelle quantité se trouveront les ressources au bout de 200 ans ?
5. En déduire pourquoi Malthus décrit une catastrophe démographique. Avait-il raison ? Pourquoi ?
6. Les modèles mathématiques sont-ils toujours exacts ?