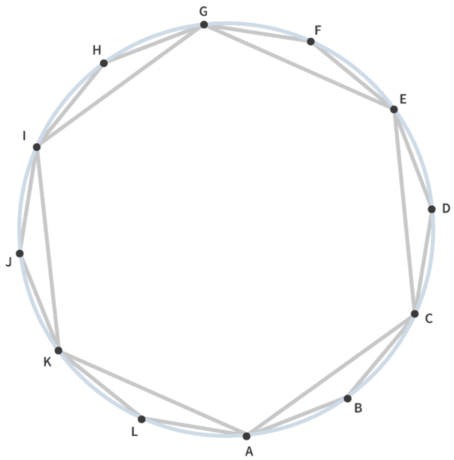
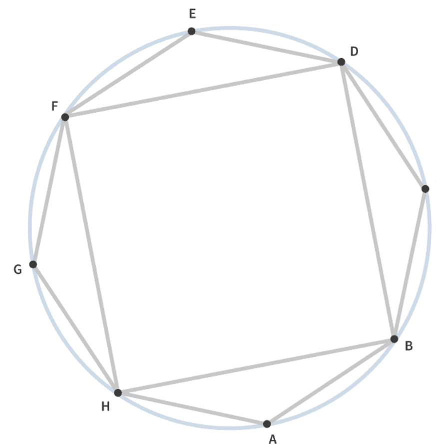
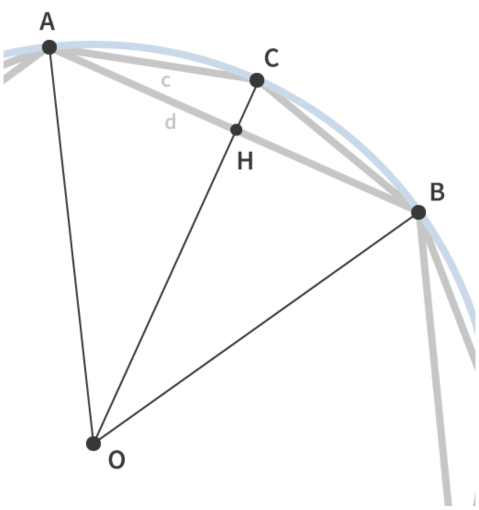
Approximation de Pi par la méthode d'Archimède

Archimède était parvenu à établir des relations mathématiques très intéressantes entre le périmètre d'un polygone à n côtés et celui d'un polygone à $2n$ côtés. Ces relations mathématiques lui ont permis de mettre en place le premier algorithme de l'histoire permettant d'approcher la valeur de π.
En effet, plus le nombre de côtés d'un polygone est important et plus son périmètre tend à se rapprocher de la circonférence de son cercle circonscrit.





On observe, de plus, une situation géométrique particulière lorsque l'on double le nombre de côtés du polygone.



On choisit un cercle de rayon 1 dans lequel on inscrit un polygone à n côtés ainsi qu'un polygone à $2n$ côtés.
On note d la longueur d'un côté du polygone à n côtés et c la longueur du polygone avec $2n$ côtés. Notre objectif est d'établir une relation entre ces deux longueurs.

1. On note H l'intersection entre le rayon du cercle et une longueur du polygone de taille n, soit AB dans notre figure.

   (a) Montrer que : $CH = 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}$.

(b) En déduire que : $c^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \dfrac{d^2}{4}}$.

2. On pose une suite u_n définie pour tout $n \geq 1$ telle que :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{u_n^2}{4}}}$$

On s'intéresse dans un premier temps aux polygones dont le nombre de côtés est un multiple de 3.

(a) Dans notre contexte, à quoi correspondent les termes u_n et u_{n+1} ? Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de la suite que nous cherchons à définir ?

(b) Déterminer le premier terme u_1 qui correspond donc à la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1.

(c) Déterminer une suite v_n permettant de déterminer le nombre de côté d'un polygone telle que v_1 est le nombre de côté d'un triangle, v_2 celui d'un hexagone, etc.

(d) On sait que le périmètre du polygone tend vers la circonférence du cercle circonscrit lors que n tend vers l'infini. En déduire l'expression d'une suite w_n dont les termes s'approchent de π vers l'infini et vérifier en générant les premiers termes de la suite avec la calculatrice.

3. Même question pour des polygones dont le nombre de côtés est un multiple de 4.