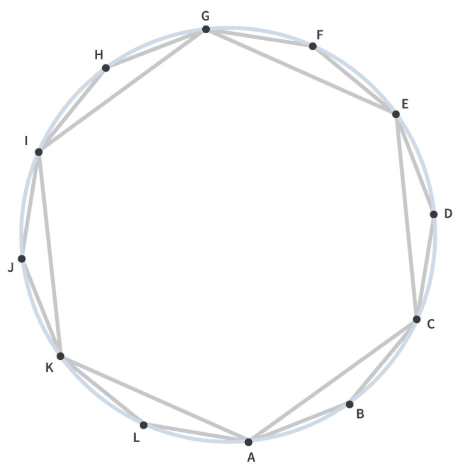
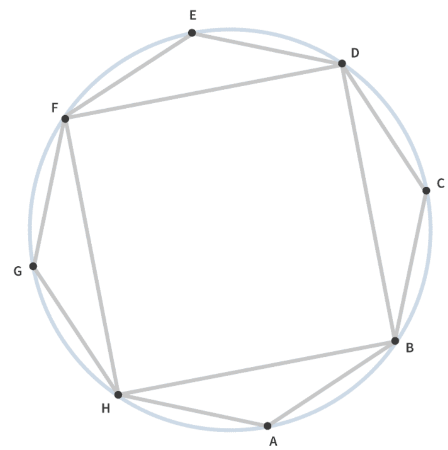
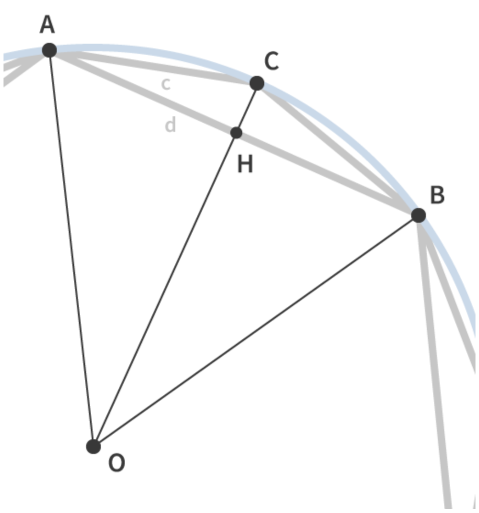
Approximation de Pi par la méthode d'Archimède

Archimède était parvenu à établir des relations mathématiques très intéressantes entre le périmètre d'un polygone à n côtés et celui d'un polygone à $2n$ côtés. Ces relations mathématiques lui ont permis de mettre en place le premier algorithme de l'histoire permettant d'approcher la valeur de π.
En effet, plus le nombre de côtés d'un polygone est important et plus son périmètre tend à se rapprocher de la circonférence de son cercle circonscrit.





On observe, de plus, une situation géométrique particulière lorsque l'on double le nombre de côtés du polygone.



On choisit un cercle de rayon 1 dans lequel on inscrit un polygone à n côtés ainsi qu'un polygone à $2n$ côtés.
On note d la longueur d'un côté du polygone à n côtés et c la longueur du polygone avec $2n$ côtés. Notre objectif est d'établir une relation entre ces deux longueurs.

1. On note H l'intersection entre le rayon du cercle et une longueur du polygone de taille n, soit AB dans notre figure.

   (a) Montrer que : $CH = 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}$.

Le triangle OAB est un triangle isocèle dont (OH) est une hauteur. On a donc :

$$CH = OC - OH = 1 - OH = 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}$$

(b) En déduire que : $c^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}$.

Le triangle ACH est rectangle en H d'où :

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = \frac{d^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}\right)^2 = \frac{d^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}} + 1 - \frac{d^2}{4} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}$$

2. On pose une suite u_n définie pour tout $n \geq 1$ telle que :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{u_n^2}{4}}}$$

On s'intéresse dans un premier temps aux polygones dont le nombre de côtés est un multiple de 3.

(a) Dans notre contexte, à quoi correspondent les termes u_n et u_{n+1} ? Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de la suite que nous cherchons à définir ?

Dans notre contexte, le terme u_n désigne le côté d d'un polygone de taille n et u_{n+1} le côté c d'un polygone de taille $2n$. Ces polygones doublent leur nombre de côtés tout en restant inscrits dans le même cercle. Ces côtés sont donc de plus en plus nombreux et de plus en plus courts. On peut faire l'hypothèse que la suite u_n est décroissante.

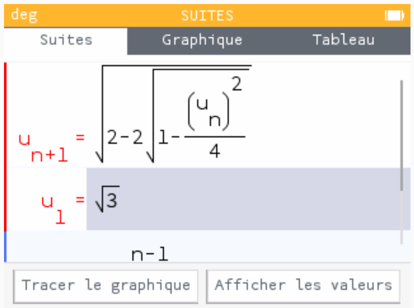
(b) Déterminer le premier terme u_1 qui correspond donc à la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1.

Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité est confondu avec le centre du cercle circonscrit au triangle. Autrement dit, le centre du cercle circonscrit se situe sur la médiane/hauteur à 1/3 de la base : la hauteur d'un tel triangle est égale à 3/2. On en déduit par le théorème de Pythagore que les côtés de ce triangle équilatéral sont égaux à $\sqrt{3}$. Ainsi : $u_1 = \sqrt{3}$.

(c) Déterminer une suite v_n permettant de déterminer le nombre de côté d'un polygone telle que v_1 est le nombre de côté d'un triangle, v_2 celui d'un hexagone, etc.

On s'intéresse à des polygones qui double leur nombre de côtés à chaque itération, donc la suite est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 3$. D'où : $v_n = 3 \times 2^{n-1}$.

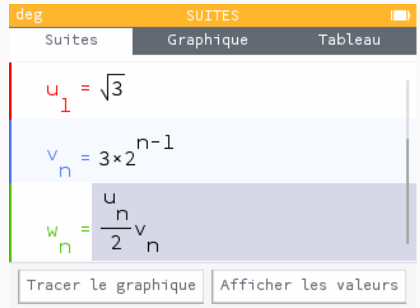
(d) On sait que le périmètre du polygone tend vers la circonférence du cercle circonscrit lors que n tend vers l'infini. En déduire l'expression d'une suite w_n dont les termes s'approchent de π vers l'infini et vérifier en générant les premiers termes de la suite avec la calculatrice.

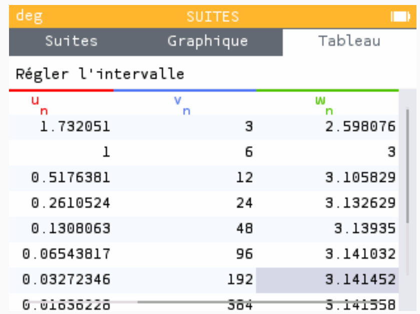


Le périmètre du polygone est la somme de ses côtés. Cependant, la circonférence du cercle dans lequel sont inscrits les polygones vaut 2π. Si l'on veut que notre suite tendent vers π, on obtient :

$$w_n = \frac{u_n}{2} \times v_n$$

La suite semble effectivement converger vers π.

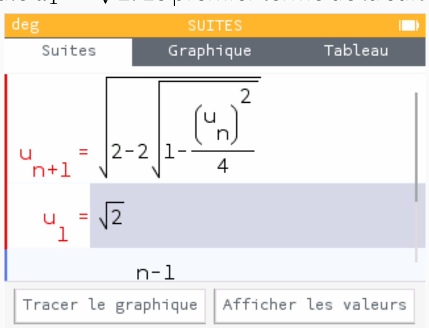


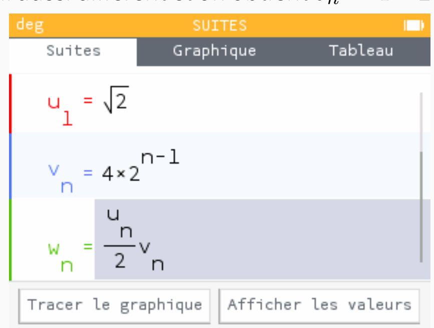


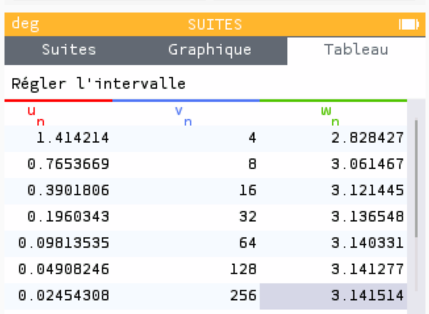
u_n	v_n	w_n
1.732051	3	2.598076
1	6	3
0.5176381	12	3.105829
0.2610524	24	3.132629
0.1308063	48	3.13935
0.06543817	96	3.141032
0.03272346	192	3.141452
0.01636228	384	3.141558

3. Même question pour des polygones dont le nombre de côtés est un multiple de 4.

On suit le même raisonnement mais en modifiant la valeur du premier terme de la suite u_n ainsi que la définition de la suite v_n.
Le premier terme de la suite u_n correspond au côté d'un carré inscrit dans un cercle de rayon 1. On calcule $u_1 = \sqrt{2}$. Le premier terme de la suite v_n est lui aussi différent et on obtient $v_n = 4 \times 2^{n-1}$.







u_n	v_n	w_n
1.414214	4	2.828427
0.7653669	8	3.061467
0.3901806	16	3.121445
0.1960343	32	3.136548
0.09813535	64	3.140331
0.04908246	128	3.141277
0.02454308	256	3.141514
0.01227177	512	3.141573

La suite semble à nouveau converger vers π.