Approximation de e par la méthode d'Euler

A la découverte de la fonction exponentielle

On cherche à construire point par point une fonction avec deux caractéristiques précises : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

1. Rappeler la définition du nombre dérivé au point d'abscisse a et en déduire une approximation du nombre $f(a+h)$ pour un réel h positif et proche de 0.

   Pour un h positif et proche de 0 :

   $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a) \iff f(a+h) \approx hf'(a)+f(a) \iff f(a+h) \approx f(a)(1+h)$$

2. On choisit $h = 0,1$. Remplir le tableau suivant :

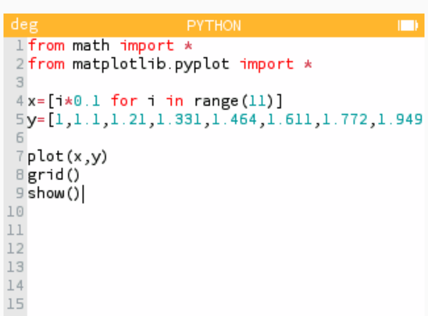
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	1										

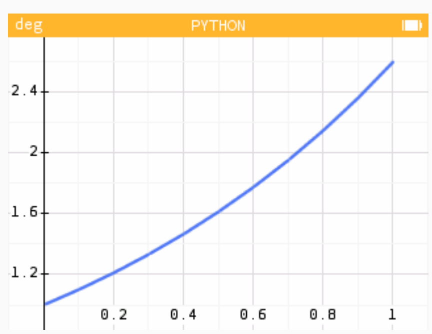
On propose ensuite de tracer la courbe correspondant aux données ci-dessus grâce à un algorithme Python utilisant le module `matplotlib.pyplot`.

On pourra utiliser la fonction `plot(listeX, listeY)` du module `matplotlib.pyplot` qui relie les points dont les coordonnées sont contenues dans deux listes : listeX et listeY.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	1	1,1	1,21	1,331	1,464	1,611	1,772	1,949	2,144	2,358	2,594

On peut tracer la courbe correspondant aux données ci-dessus grâce à un algorithme Python utilisant le module `matplotlib.pyplot`.





On peut proposer aux élèves plus avancés de construire la fonction sur un intervalle [0 ;5], par exemple, et de la comparer à la courbe exponentielle. Voir ici [a].

a. https://my.numworks.com/python/elodie-gamot/fonction_exp_euler

3. D'après le tableau ci-dessus, exprimer les évolutions de x et $f(x)$ en utilisant les suites numériques.

   On remarque que les antécédents suivent une suite arithmétique de raison 0,1 et de premier terme 0. Les images, quant à elles, suivent une suite arithmétique de raison 1,1 et de premier terme 1.

4. En déduire une expression (approximative) de $f(nh)$ avec n entier naturel.

$$f(nh) \approx (1+h)^n$$

5. On pose maintenant $x = n \times h$. Exprimer $f(x)$ et en déduire une expression de $f(1)$.

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

6. On appelle $f(1)$ le nombre e, appelé exponentielle, lorsque n tend vers l'infini. Plus n est grand et plus le résultat tend vers la valeur recherchée.
   On propose de programmer un algorithme en Python permettant de calculer ce nombre e pour plusieurs valeurs de n à l'aide d'une fonction `calcul(n)`.

```python
from math import *

def calcul(n):
  return (1+1/n)**n
```