Flocon de Koch

La fractale est un objet mathématique basé sur la répétition. Sa structure est identique, quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe. Certaines fractales sont bien connues. On a par exemple l'ensemble de Mandelbrot, donc le script se trouve par défaut sur la calculatrice NumWorks. Le flocon de Koch est l'une de ces fractales très populaires et dont la réalisation est simple à comprendre. Elle repose sur une série d'instructions que l'on peut répéter à l'infini :

— Couper un segment en trois parties
— Construire un triangle équilatéral sur la partie centrale du segment, dont on ne conservera pas la base

Flocon de Koch et suites numériques

1. On veut modéliser le nombre de segments se trouvant sur une ligne du flocon (comme montré précédemment sur la figure) par une suite u_n.
   (a) A l'état initial $n = 0$, on ne dispose que d'un seul segment horizontal. Quelle est la valeur de u_1 (qui correspond au dessin de gauche sur la figure) ?

   On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$.

   (b) Quelle est la relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} ?

   $u_{n+1} = u_n \times 4$

   (c) En déduire la formule explicite de la suite u_n.

   $u_n = 4^n$

2. On s'intéresse maintenant à la longueur de chacun de ces segments.
   (a) Soit l la longueur du segment d'origine. On donne $l = 3$. Quelle est la longueur d'un segment après la première itération ?

   Après la première itération, chacun des segments mesure $\dfrac{l}{3} = 1$.

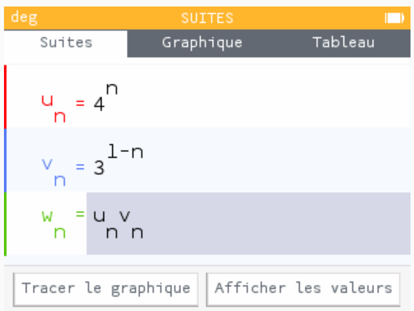
   (b) On note v_n la suite qui modélise la longueur d'un segment au bout de n itérations. Quelle est la relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n ? En déduire une expression de v_n.

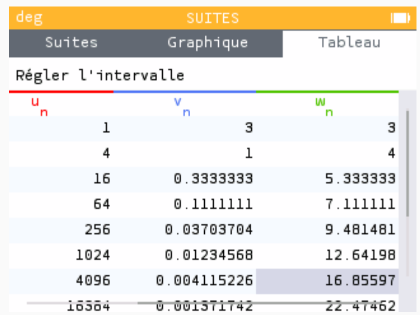
On a $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3}$ avec $v_0 = 3$, d'où $v_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3^{1-n}$

3. On souhaite maintenant s'intéresser à la longueur totale du côté du flocon après n itérations.
   (a) On appelle w_n la suite associée à cette longueur. Exprimer w_n en fonction de u_n et v_n.

   $w_n = u_n \times v_n$

   (b) On rappelle que $u_0 = 1$ et $v_0 = 3$. A l'aide de l'application Suites, faire apparaître le tableau de valeurs des trois suites entre 0 et 15. Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence la suite w_n ?





   (c) Démontrer cette conjecture.

$$w_n = u_n \times v_n = 4^n \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

   Il s'agit d'une suite géométrique de raison supérieure à 1. Elle tend donc vers l'infini.

4. Nous allons enfin nous intéresser à l'évolution de la surface située sous la courbe au fil des itérations.
   (a) On considère un triangle équilatéral de côté c. Calculer son aire en fonction de c.

   Le triangle équilatéral de côté c admet une hauteur de longueur $c \times \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

   Sa surface est donc égale à $\dfrac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

   (b) D'après l'étude précédente de la suite u_n, établir que l'aire des triangles formés à chaque itération évolue selon une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{9}$.

   A chaque itération, la longueur d'un segment est multipliée par $\dfrac{1}{3}$. L'aire d'un triangle est donc multipliée par $\dfrac{1}{9}$.

   (c) On appelle a_n l'aire formée par l'ensemble des triangles apparaissant à chaque itération sous la courbe, pour n>0. D'après les questions précédentes, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique.

A chaque itération, il apparaît 4 fois plus de triangles (suite v_n) dont l'aire est 9 fois plus petite. D'où :

$$a_{n+1} = \frac{4}{9} a_n$$

Il s'agit bien de la définition d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$.

(d) On rappelle que l'aire contenue sous le triangle à $n = 1$ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$. En déduire l'aire se trouvant sous la courbe après n itérations lorsque n tend vers l'infini.

On sait que l'aire contenue sous la courbe est la somme des a_n apparaissant à chaque itération. On utilise la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{9}{5} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$$

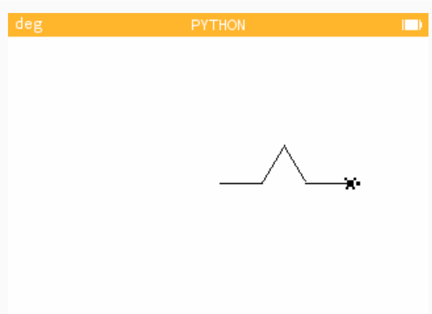
Lorsque n tend vers l'infini, la suite tend vers $\frac{9\sqrt{3}}{20}$. Une fractale est un objet géométrique de longueur infinie dans un espace fini !

Programmer un flocon de Koch

Pour représenter graphiquement ce flocon de Koch à l'aide d'un programme, nous allons utiliser le module Turtle de la calculatrice qui permet de piloter une tortue à l'écran à l'aide d'instructions basiques. Par défaut, la tortue démarre au centre de l'écran, tournée vers la droite. L'instruction **forward**(x) permet de faire avance la tortue de x pixels. Les instructions **left**(a) et **right**(a) permettent de faire pivoter la tortue à gauche ou à droite de a degrés.

1. Ecrire un programme permettant de tracer un côté du flocon de Koch après une itération. On utilisera une fonction **cote**(l), l étant défini comme la longueur du segment initial. On n'oubliera pas de faire précéder l'algorithme de la ligne **from turtle import** $*$ qui permet d'importer toutes les fonctions du module Turtle.

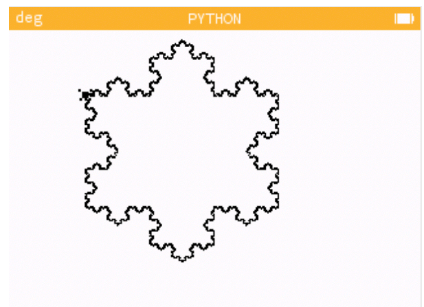
```
from math import *
from turtle import *

def cote(l):
  forward(l/3)
  left(60)
  forward(l/3)
  right(120)
  forward(l/3)
  left(60)
  forward(l/3)
```



2. On aimerait écrire une fonction qui permet de tracer le segment après n itérations.
   Les mouvements utilisés sur cette première itération sont exactement identiques à chaque itération sur chaque segment. Nous allons donc utiliser la récursivité, un concept de programmation qui permet à une fonction de s'appeler elle-même.
   Ici, le bloc d'instruction que l'on souhaite répéter, et qui doit donc s'appeler lui-même correspond à la fonction que nous avons écrite précédemment. Compléter l'algorithme suivant :

```
1  from turtle import *
2
3  def cote(l,n):
4    if n == 0:
5        forward(l)
6    else:
7        cote(   ,n-1)
8        left(   )
9        cote(   ,n-1)
10       right(   )
11       cote(   ,n-1)
12       left( )
13       cote(   ,n-1)
```

3. A quoi servent les instructions en ligne 4 et 5 ?



4. Ecrire une fonction **flocon**(**l**, **n**), faisant appel à la fonction définie précédemment et permettant de tracer le flocon dans sa totalité.

```
from turtle import *

def cote(l,n):
  if n == 0:
      forward(l)
  else:
      cote(l/3,n-1)
      left(60)
      cote(l/3,n-1)
      right(120)
      cote(l/3,n-1)
      left(60)
      cote(l/3,n-1)

def flocon(l,n):
  penup()
  goto(-100,60)
  pendown()
  for i in range(3):
    cote(l,n)
    right(120)
```

Les instructions en ligne 4 et 5 permettent d'arrêter la récursion. La fonction cesse de s'appeler elle-même.