Autour de la suite de Syracuse

On appelle une suite de Syracuse une suite construite sur un schéma très simple :

- On choisit un entier n.
- S'il est pair, on le divise par deux.
- S'il est impair, on le multiplie par 3 et on lui soustrait 1.
- Et on recommence le procédé…

Coder les suites de Syracuse

On cherche à réaliser une fonction `syracuse(m,n)` qui va lister les n premiers éléments de la liste de Syracuse démarrant du nombre m.
On propose d'utiliser une variable `liste` dans laquelle on stockera les valeurs successives de la suite.

1. Comment initialiser la variable `liste` en début de programme ?

   En début de programme, on connaît déjà le premier élément de la liste : c'est le nombre de départ. On utilisera `liste=[m]`

2. Quel type de boucle permet de lister les n premiers éléments d'une liste ?

   On connaît le nombre d'éléments à lister, on utilisera donc l'instruction `for i in range(n-1)`. Attention, on connaît déjà le premier terme de la liste, il faut donc calculer les $n-1$ autres.

3. Quelle instruction permet d'ajouter un élément m à la liste ?

   On écrira `liste.append(m)`.

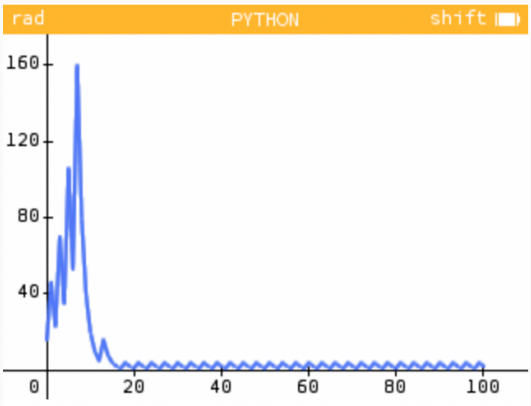
4. A l'aide des questions précédentes, écrire la fonction `syracuse(m,n)` et tester avec `syracuse(15,10)`. On suggère d'utiliser `int(m/2)` pour limiter l'affichage des décimales au sein de la liste.

```
def syracuse(m,n):
  liste=[m]
  for i in range(n-1):
    if m%2==0:
      m=m/2
    else:
      m=3*m+1
    liste.append(m)
```

```
    return liste
```

5. On propose de réaliser une fonction `syracuse_graph(m)` qui permet de représenter graphiquement les 100 premiers termes de la suite de Syracuse du nombre m.
   On pourra définir une liste `X=[i for i in range(100)]` en abscisse et utiliser le programme précédent pour obtenir la liste des éléments de la suite à entrer en ordonnées. L'instruction `graph(X,Y)` permettra la représentation graphique.
   On n'oubliera pas, bien sûr, d'importer le module `matplotlib.pyplot` !

```
def syracuse_graph(m):
    X=[i for i in range(100)]
    Y=syracuse(m,100)
    plot(X,Y)
    show()
```



Toutes les suites de Syracuse mènent à Rome

Il existe une hypothèse mathématique qui n'a encore jamais été démontrée... mais jamais infirmée non plus : toutes les suites de Syracuse atteignent le nombre 1, à un moment ou à un autre. C'est la **conjecture de Syracuse**.

1. Reprenons la suite de Syracuse du nombre 15 et, à l'aide de notre fonction, affichons non plus les 10 mais les 20 premiers termes de la suite. Atteignez-vous le nombre 1 ?

   On atteint bien le nombre 1 !

2. Essayez avec d'autres nombres, d'autres valeurs. Affichez par exemple les premiers termes de la suite de Syracuse de 31 : combien de termes devez-vous afficher à l'écran avant de trouver le nombre 1 ?

   Il faut aller au-delà de 100 nombres dans la liste pour trouver le nombre 1 dans la suite de Syracuse de 31. Il faut précisément 107 éléments dans la liste pour y arriver.
   On peut discuter de l'évolution de la suite une fois qu'elle a atteint la valeur 1. Les nombres suivants

sont forcément 4, 2, puis 1 et se répètent à l'infini.

3. Nous allons créer une fonction `syracuse_search(m)` qui, s'appuyant sur la conjecture précédente, permet de connaître l'indice du premier élément de la liste égal à 1. Notre programme doit donc boucler jusqu'à ce que le nouvel élément calculé soit égal à 1. Quel type de boucle utiliser ici ?

   On utilisera une boucle `while`. Si l'on conserve le même procédé, la condition à respecter dans la boucle est `m!=1`.
   On créera donc une variable pour comptabiliser le nombre de boucles. Si l'on souhaite que cette variable compte le nombre d'éléments dans la liste, on l'initialise à 1. Si l'on souhaite que la variable compte l'indice de l'élément dans la suite, l'élément initial m étant d'indice 0, alors on l'initialise à 0.

4. Ecrire la fonction `syracuse_search(m)` et vérifier que son exécution est cohérente avec vos essais précédents.

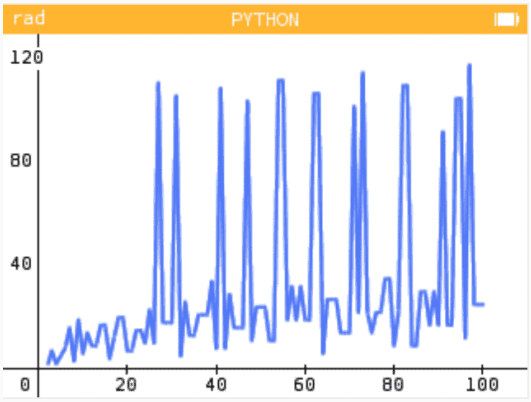
```
def syracuse_search(m):
  i=0
  while m!=1:
    if m%2==0:
      m=int(m/2)
    else:
      m=3*m+1
    i+=1
  return i
```

   Dans la suite de Syracuse de 31, le premier nombre 1 est obtenu avec l'indice 106. Dans la suite de Syracuse de 15, il est obtenu avec l'indice 17.

5. Testez votre programme avec d'autres valeurs. Existe-t-il une corrélation entre le nombre m et l'indice obtenu par la fonction `syracuse_search(m)` ?

   A priori, non ! On constate que `syracuse_search(31)` renvoit 106 alors que `syracuse_search(30)` renvoie 18 et `syracuse_search(32)` renvoie 5.

6. Pour vérifier notre réponse, on propose de rédiger une fonction `graph()` qui permet de représenter graphiquement les indices obtenus par la fonction précédente pour les nombres allant de 2 à 100.
   On créera une première liste X avec les entiers allant de 2 jusqu'à 100, puis une seconde Y dans laquelle on stockera les résultats de `syracuse_search` pour ces nombres respectifs.




```python
def graph():
  X=[i for i in range(2,101)]
  Y=[syracuse_search(i) for i in X]
  plot(X,Y)
  show()
```

Effectivement, il ne semble pas y avoir de corrélation entre l'indice du premier élément 1 et le nombre m. Il ne semble pas non plus y avoir de périodicité.