

Le paradoxe du duc de Toscane

Un défi sur deux dés

Frédérique et Gaëlle jouent aux dés. Frédérique défie Gaëlle : “Si en faisant la somme des chiffres obtenus sur deux dés, tu obtiens 8, je te donne 10€. Si tu obtiens 7, c’est toi qui me donne 10€. Et nous relançons le dé jusqu’à la victoire de l’une d’entre nous.” On veut déterminer si Frédérique a eu raison de lancer ce défi.

1. On note X la variable aléatoire associée au chiffre inscrit sur le premier dé et Y la variable aléatoire associée au chiffre inscrit sur le second. Quelles sont les valeurs que peuvent prendre X et Y ?
2. On note Z la variable aléatoire telle que $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. A l’aide d’un tableau à double entrée, déterminer les combinaisons permettant d’obtenir $Z = 7$ et $Z = 8$. Pour laquelle de ces deux valeurs le nombre de combinaisons est-il le plus important ?
4. Déterminer $P(Z = 7)$ et $P(Z = 8)$. Pourquoi Frédérique lance-t-elle ce défi ? Pensez-vous qu’elle a raison de le faire ?

Simulation d’échantillons

Frédérique a perdu et n’en revient pas ! Elle était pourtant sûre d’elle et souhaite réaliser une simulation pour en avoir le coeur net.

1. On cherche à écrire une fonction `lancers(n)` qui simule n lancers d’une paire de dés et représente graphiquement les résultats. Pour plus de simplicité, on utilisera la fonction `hist(liste,nombre)` du module Matplotlib qui permet simplement de représenter un histogramme en donnant en premier argument la séquence de données qui nous intéresse, et en second argument le nombre de colonnes à générer (par défaut, le nombre maximal de colonnes dans l’histogramme est de 10). Que constate-t-on lorsque l’on augmente le nombre de lancers de dés ?
2. Écrire en langage Python une fonction `moyenne(n)` qui renvoie la moyenne d’un échantillon de n lancers de dés. Que constate-t-on lorsque l’on augmente la taille de l’échantillon ? Frédérique peut-elle être rassurée sur la pertinence de son défi initial ?
3. Pour aller encore plus loin, on cherche à calculer, lors d’une simulation d’échantillons, la fréquence à laquelle on obtient des 7 et des 8. Écrire en langage Python une fonction `Freq(n)` qui calcule ces fréquences.

Le paradoxe du duc de Toscane

Grand amateur de jeu, le duc de Toscane interpelle Galilée sur un curieux résultat qu'il obtient aux dés. En effet, il existe autant de façons d'obtenir par la somme de trois dés les nombres 9 et 10, remarque-t-il, et pourtant le nombre 10 est obtenu beaucoup plus fréquemment que l'autre.

1. Comme dans la première partie, réaliser une simulation d'échantillons de n lancers pour vérifier lequel des deux nombres est obtenu le plus fréquemment.
2. Quels sont les différents triplets de dés qui permettent d'obtenir le nombre 9?
3. Quels sont les différents triplets de dés qui permettent d'obtenir le nombre 10?
4. Qu'est-ce qui permet d'expliquer que le nombre 10 est plus souvent obtenu que le nombre 9?

Pour la petite histoire!

L'erreur est humaine et n'épargne pas les plus esprits les plus brillants! Ainsi, Leibniz, mathématicien et philosophe allemand publie en 1678 un document sur le jeu de Quinquenove, jeu de hasard pour lequel il aimerait comparer les chances de gagner des joueurs. Ce jeu de hasard implique de lancer deux dés et Leibniz s'intéresse à leur somme. Après avoir listé les différentes sommes possibles, il écrit : *"On voit par ce schématisation, qu'il n'y a qu'un seul moyen de faire 2 points, ou 3 points, ou 11 points, ou 12 points."*

Pour lui, le seul moyen de faire 2 points est $1+1$ et le seul moyen de faire 3 points est $2+1$. Et d'en conclure que la probabilité d'obtenir 2 est identique à la probabilité d'obtenir 3!

Or, on l'a mis en évidence à travers l'usage du tableau à double entrée, il est bien plus probable d'obtenir la valeur 3, qui est le résultat de deux combinaisons (1,2) et (2,1), que la valeur 2. Leibniz n'opère cependant pas la distinction entre les deux permutations du couple et en tire des conclusions erronées tout au long de son papier. Un raisonnement très semblable à celui du duc de Toscane!