Le paradoxe du duc de Toscane

Un défi sur deux dés

Frédérique et Gaëlle jouent aux dés. Frédérique défie Gaëlle : "Si en faisant la somme des chiffres obtenus sur deux dés, tu obtiens 8, je te donne 10€. Si tu obtiens 7, c'est toi qui me donne 10€. Et nous relançons le dé jusqu'à la victoire de l'une d'entre nous." On veut déterminer si Frédérique a eu raison de lancer ce défi.

1. On note X la variable aléatoire associée au chiffre inscrit sur le premier dé et Y la variable aléatoire associée au chiffre inscrit sur le second. Quelles sont les valeurs que peuvent prendre X et Y ?

   $X, Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. On note Z la variable aléatoire telle que $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?

   $Z = \{2, 3, 4, 5, ..., 11, 12\}$

3. A l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer les combinaisons permettant d'obtenir $Z = 7$ et $Z = 8$. Pour laquelle de ces deux valeurs le nombre de combinaisons est-il le plus important ?

   A l'aide d'un tableau à double entrée, on obtient 6 combinaisons de dés qui permettent d'obtenir 7 au total, et seulement 5 qui permettent d'obtenir 8 au total.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

4. Déterminer $P(Z = 7)$ et $P(Z = 8)$. Pourquoi Frédérique lance-t-elle ce défi ? Pensez-vous qu'elle a raison de le faire ?

   $P(Z = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ et $P(Z = 8) = \frac{5}{36}$ Effectivement, la probabilité qu'a Frédérique de gagner est plus élevée. Elle a plus de chances de gagner que Gaëlle.

Simulation d'échantillons

Frédérique a perdu et n'en revient pas ! Elle était pourtant sûre d'elle et souhaite réaliser une simulation pour en avoir le coeur net.

1. On cherche à écrire une fonction `lancers(n)` qui simule n lancers d'une paire de dés et représente graphiquement les résultats. Pour plus de simplicité, on utilisera la fonction `hist(liste,nombre)` du module Matplotlib qui permet simplement de représenter un histogramme en donnant en premier argument la séquence de données qui nous intéresse, et en second argument le nombre de colonnes à générer (par défaut, le nombre maximal de colonnes dans l'histogramme est de 10). Que constate-t-on lorsque l'on augmente le nombre de lancers de dés ?

```python
from math import *
from random import *
from matplotlib.pyplot import *
def resultat():
  return randint(1,6)+randint(1,6)
def lancers(n):
  lancers=[]
  bins = [x+0.5 for x in range(1,13)]
  for i in range(n):
    lancers.append(resultat())
  hist(lancers,bins)
  show()
```

Plus l'on augmente le nombre de lancers, plus le profil de l'histogramme paraît "régulier". Les valeurs centrales sont obtenues plus fréquemment, et la fréquence baisse au fur et à mesure que l'on s'approche des valeurs extrêmes.
A noter que, dans le programme précédent, `bins` est un argument non-essentiel. Il permet de positionner les "boîtes" juste au-dessus de l'abscisse correspondante.

2. Écrire en langage Python une fonction `moyenne(n)` qui renvoie la moyenne d'un échantillon de n lancers de dés. Que constate-t-on lorsque l'on augmente la taille de l'échantillon ? Frédérique peut-elle être rassurée sur la pertinence de son défi initial ?

On écrit à la suite du script précédent :

```python
def moyenne(n):
  somme=0
  for i in range(n):
    somme=somme+resultat()
  return somme/n
```

Plus l'on augmente le nombre de lancers et plus la moyenne se rapproche de la valeur 7. Frédérique avait raison de penser qu'elle gagnerait le défi puisque l'on obtient en moyenne 7 en jouant à ce jeu. Cependant, dans la pratique, on ne peut vérifier ce résultat que lorsque l'on lance un grand nombre de fois les dés.

3. Pour aller encore plus loin, on cherche à calculer, lors d'une simulation d'échantillons, la fréquence à

laquelle on obtient des 7 et des 8. Écrire en langage Python une fonction `Freq(n)` qui calcule ces fréquences.

On peut écrire à la suite du script :

```
def freq(n):
  x=0
  y=0
  for i in range(n):
    d=resultat()
    if d==7:
       x+=1
    if d==8:
       y+=1
  print("Frequence de 7 =",x/n*100,"%")
  print("Frequence de 8 =",y/n*100,"%")
```

Le paradoxe du duc de Toscane

Grand amateur de jeu, le duc de Toscane interpelle Galilée sur un curieux résultat qu'il obtient aux dés. En effet, il existe autant de façons d'obtenir par la somme de trois dés les nombres 9 et 10, remarque t-il, et pourtant le nombre 10 est obtenu beaucoup plus fréquemment que l'autre.

1. Comme dans la première partie, réaliser une simulation d'échantillons de n lancers pour vérifier lequel des deux nombres est obtenu le plus fréquemment.

   Il suffit de modifier la fonction `resultat()` pour y ajouter le résultat d'un dé, et de modifier l'histogramme de la fonction `lancers()` pour qu'il affiche 16 colonnes.

2. Quels sont les différents triplets de dés qui permettent d'obtenir le nombre 9 ?

   $\{1,2,6\}, \{1,3,5\}, \{2,2,5\}, \{1,4,4\}, \{2,3,4\}, \{3,3,3\}$

3. Quels sont les différents triplets de dés qui permettent d'obtenir le nombre 10 ?

   $\{2,2,6\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}, \{3,3,4\}, \{4,2,4\}$

4. Qu'est-ce qui permet d'expliquer que le nombre 10 est plus souvent obtenu que le nombre 9 ?

   Les combinaisons recensées dans les deux premières questions ne sont pas équivalentes. En effet, il n'existe qu'une seule façon d'obtenir $\{3,3,3\}$. En revanche, le triplet $\{2,3,5\}$, par exemple, connaît trois permutations. Dans la première partie de cette activité, nous avions recensé les différentes combinaisons à l'aide d'un tableau à double entrée, ce qui nous a permis de considérer $\{2,6\}$ et $\{6,2\}$

avec le même poids.

Pour la petite histoire !

L'erreur est humaine et n'épargne pas les plus esprits les plus brillants ! Ainsi, Leibniz, mathématicien et philosophe allemand publie en 1678 un document sur le jeu de Quinquenove, jeu de hasard pour lequel il aimerait comparer les chances de gagner des joueurs. Ce jeu de hasard implique de lancer deux dés et Leibniz s'intéresse à leur somme. Après avoir listé les différentes sommes possibles, il écrit : *"On voit par ce schématisme, qu'il n'y a qu'un seul moyen de faire 2 points, ou 3 points, ou 11 points, ou 12 points."*
Pour lui, le seul moyen de faire 2 points est 1+1 et le seul moyen de faire 3 points est 2+1. Et d'en conclure que la probabilité d'obtenir 2 est identique à la probabilité d'obtenir 3 !
Or, on l'a mis en évidence à travers l'usage du tableau à double entrée, il est bien plus probable d'obtenir la valeur 3, qui est le résultat de deux combinaisons (1,2) et (2,1), que la valeur 2. Leibniz n'opère cependant pas la distinction entre les deux permutations du couple et en tire des conclusions erronées tout au long de son papier.
Un raisonnement très semblable à celui du duc de Toscane !