Arithmétique et listes en compréhension

Cette fiche a été rédigée par Alain Busser. Il enseigne au lycée Roland-Garros du Tampon. Il est aussi animateur à l'IREM de La Réunion et créateur du langage de programmation Sophus.

Introduction : la fonction modulo

La fonction modulo (notée `%`, disponible dans la **Toolbox**) donne le reste dans la division euclidienne du nombre situé avant le `%`, par le second nombre. Par exemple, si on effectue la division de 23 par 10, le reste est 3, ce qui se note `23%10==3`. Cela suppose que les opérandes sont des entiers. La divisibilité peut se tester à l'aide de cette opération :
On dit que a est divisible par b, ou que a est un multiple de b, si `a%b==0`.

Par exemple, pour obtenir la liste des multiples de 3 entre 0 et 20, on peut écrire la liste en extension : `[0,3,6,9,12,15,18]` ou la décrire en compréhension : `[t for t in range(20) if t%3==0]`. On dit qu'on a filtré la liste des entiers inférieurs à 20, par la fonction booléenne "est multiple de 3".
Cette notion est fondamentale en programmation fonctionnelle et dans les algorithmes de Big Data.

Exercices préliminaires

— Décrire en compréhension la liste des entiers pairs de 2 chiffres.

```
[entier for entier in range(100) if entier%2==0]
```

— Décrire en compréhension la liste des nombres inférieurs à 100 qui sont multiples, ou bien de 5, ou bien de 7.

```
[n for n in range(100) if n%5==0 or n%7==0]
```

— Décrire en compréhension la liste `zfizzbuz` des entiers inférieurs à 100 qui sont multiples de 5 ou de 7 mais pas de 5 et 7 en même temps.

```
fizzbuzz=[n for n in range(100) if (n%5==0 or n%7==0) and n%35!=0]
```

— Si le temps le permet, programmer le crible d'Eratosthène avec des compréhensions.

```
      crible = list(range(2,100))
      for n in range(2,10):
        crible=[k for k in crible if k<=n and k%n!=0]
      print(crible)
```

Exemples

Les compréhensions permettent de programmer facilement les fonctions suivantes :

— `inter`, qui accepte deux listes l1 et l2 en entrée, et renvoie l'intersection des deux listes, c'est-à-dire la liste des éléments communs à l1 et l2 ;

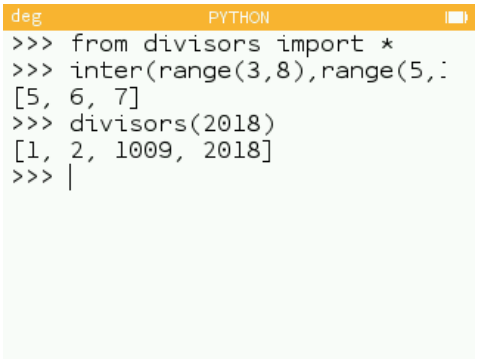
— `divisors`, qui accepte un entier n en entrée, et renvoie la liste de ses diviseurs.

Pour les tester, créer un module Python appelé `divisors.py` et y entrer ceci :

```
def inter(l1,l2):
  return [x for x in l1 if x in l2]
def divisors(n):
  return [d for d in range(1,n+1) if n%d==0]
```

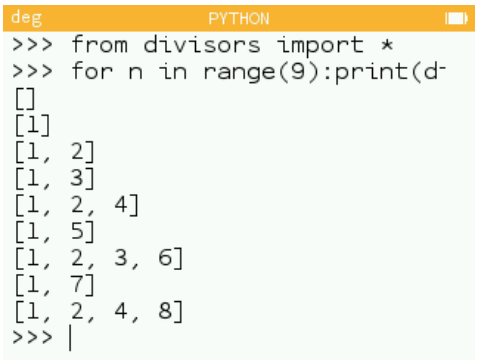
Ensuite, retourner dans la console interactive et y entrer `inter(range(3,8),range(5,13))` pour savoir quelle est l'intersection des listes `[3,4,5,6,7]` et `[5,6,7,8,9,10,11,12]`.

Pour savoir quels sont les diviseurs de 2018, faire `divisors(2018)`.



On peut voir à quoi ressemblent des listes de diviseurs pour plusieurs entiers, en appelant la fonction `print()`

dans une boucle comme `for n in range(9):print(divisors(n))` laquelle produit l'effet ci-dessous.



On voit que l'algorithme est pris en défaut pour 0, qui est affiché n'ayant aucun diviseur alors qu'en réalité c'est tout le contraire : 0 est divisible par tous les autres entiers. Ceci dit, il ne serait pas prudent de demander à la NumWorks d'afficher une liste de taille infinie ! Ensuite, 1 est clairement le seul entier n'ayant qu'un seul diviseur, les autres sont tous divisibles par au moins 1 et eux-mêmes. Ce qui amène à la notion de primalité.

Exercice

Rédiger un test de primalité sous forme d'une fonction `estPremier(n)` acceptant en entrée un entier n, et renvoyant `True` si n est premier, et `False` sinon. On peut faire appel à la fonction `len(L)` qui accepte une liste L en entrée et renvoie le nombre de ses éléments, ainsi qu'à l'une des fonctions précédemment définies.

```
def estPremier(n):
  return len(divisors(n))==2
```

Autres exercices

On aborde dans la série d'exercices suivants, la notion de diviseurs communs à deux entiers.

1. Écrire une fonction Python `cd(a,b)` qui accepte deux entiers a et b en entrée et qui renvoie la liste des diviseurs communs à a et b. On peut utiliser la fonction `inter()` définie au début de cette activité.

```
def cd(a,b):
  return inter(divisors(a),divisors(b))
```

2. En déduire un algorithme "naïf" de calcul du pgcd, qui est le plus grand élément de `cd(a,b)`, comme son nom "plus grand commun diviseur" l'indique. On pourra utiliser la fonction `max(L)` qui accepte en entrée une liste L de nombres et renvoie le plus grand élément de cette liste. On demande une fonction `pgcd(a,b)` qui accepte en entrée deux entiers a et b, et renvoie leur pgcd.

```
def pgcd(a,b):
  return max(cd(a,b))
```

3. En déduire également un test `premiersEntreEux(a,b)` qui accepte en entrée deux entiers a et b et renvoie `True` si a a et b sont premiers entre eux et `False` s'ils ont un diviseur commun autre que 1. Là encore, la fonction `len` peut être utile, puisque le fait que deux entiers soient premiers entre eux est lié au nombre de leurs diviseurs communs.

```
def premiersEntreEux(a,b):
  return len(cd(a,b))==1


def premiersEntreEux(a,b):
  return pgcd(a,b)==1
```

4. Déduire de la fonction précédente, une fonction `eulerphi(n)` où n est un entier, renvoyant le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. Par exemple, les nombres inférieurs à 8 et premiers avec 8 sont 1, 3, 5 et 7 ce qui fait que `eulerphi(8)==4`.

```
def eulerphi(n):
  return len([x for x in range(1,n) if premiersEntreEux(x,n)])
```

5. On dit qu'un entier est parfait si la somme de ses diviseurs est égale à son double. Par exemple, les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 et 1+2+3+6=12 qui est le double de 6, donc 6 est parfait. Écrire un test de perfection sous la forme d'une fonction Python `estParfait(n)` acceptant un entier n en entrée et renvoyant `True` si n est parfait et `False` sinon. On pourra utiliser la fonction `sum(L)` acceptant en entrée une liste d'entiers L et renvoyant la somme des éléments de cette liste. On a vu que 6 est un nombre parfait. Quels sont les deux suivants ?

```
def estParfait(n):
  return sum(divisors(n))==2*n
```