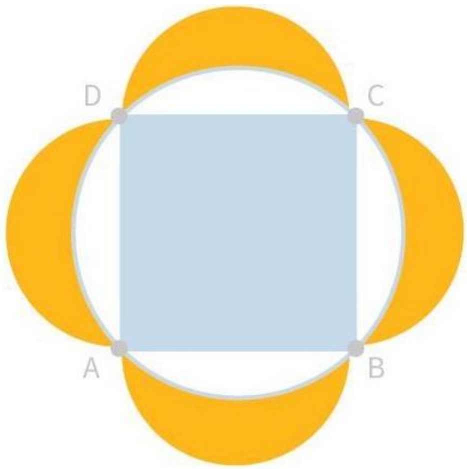
Le problème des lunules

On attribue la formulation de ce problème à Hippocrate de Chios, qui vécut au Ve siècle avant notre ère.



On considère un carré de côté c que l'on inscrit dans un cercle, de rayon r. On construit ensuite quatre lunules à partir des côtés du carré, c'est-à-dire que l'on construit les demi-cercles de diamètre AB, BC, CD et AD et on s'intéresse à la surface de ces demi-cercles auxquels on soustrait la surface contenue dans le cercle de rayon r. Les lunules apparaîssent en jaune sur la figure.

Nous allons montrer que l'aire de ces quatre lunules est identique à l'aire du carré ABCD.

1. Exprimer la relation existant entre c et r.

   $c = r\sqrt{2}$

2. On s'intéresse à la lunule construite sur le côté AB. Exprimer en fonction de r, puis en fonction de c, la surface comprise entre le segment $[AB]$ et l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

   On appelle O le centre du cercle et du carré ABCD.
   La surface comprise dans le quart de cercle auquel appartient l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ est égale à $\frac{\pi r^2}{4}$. On y soustrait la surface du triangle OAB, soit $\frac{r^2}{2}$. D'où une surface à égale à $(\pi - 2)\,\frac{r^2}{4} = (\pi - 2)\,\frac{c^2}{8}$.

3. En déduire la surface de la lunule.

   On soustrait le résultat obtenu à la question précédente à l'aire du demi-cercle de diamètre AB. L'aire du demi-cercle de diamètre AB est égale à $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$, d'où :
   $A_{lun} = \frac{\pi c^2}{8} - (\pi - 2)\,\frac{c^2}{8} = \frac{c^2}{4}$

4. En conclure que la surface des 4 lunules est égale à la surface du carré ABCD.

   D'après le résultat précédent, la somme des surfaces des lunules est égale à c^2, ce qui est bien l'aire du carré ABCD.