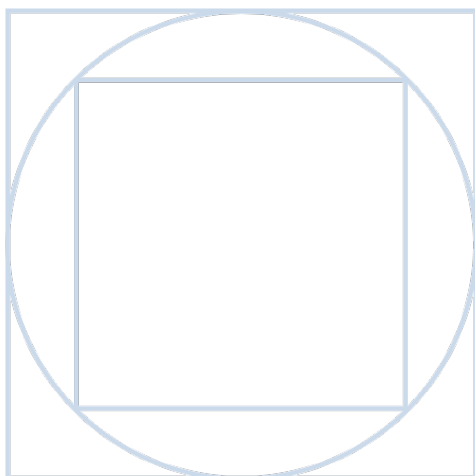


## Approximation de Pi

Cette méthode s'inspire de celle d'Archimède, à l'origine du premier algorithme de calcul pour déterminer la valeur de  $\pi$ . Nous allons cependant nous faciliter la tâche en utilisant la trigonométrie... que ne connaissait pas Archimède!

D'abord un carré...



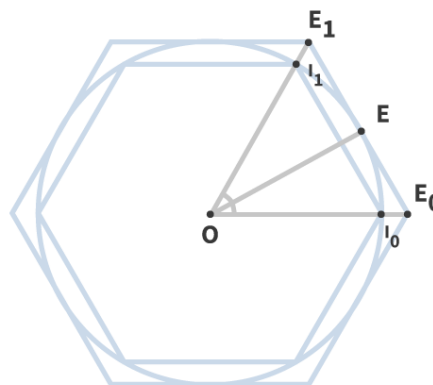
On considère un cercle de rayon 1 dans lequel est inscrit un carré. Ce cercle est lui-même inscrit dans un autre carré.

On fait maintenant l'hypothèse que le périmètre du cercle est compris entre celui des deux carrés.

Exprimer le périmètre de ces deux carrés et en déduire un encadrement de  $\pi$ .

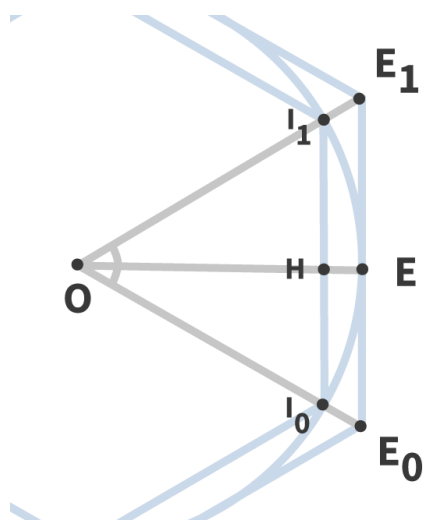
... puis un hexagone...

On reprend le même type de raisonnement mais en remplaçant maintenant les carrés par des hexagones réguliers.



1. On s'intéresse à l'angle formé en  $O$  par les points  $O$ ,  $I_0$  et  $I_1$ . Que peut-on dire sur cet angle? En déduire la nature du triangle  $OI_0I_1$ , puis un périmètre de l'hexagone intérieur.
2. Quelle est la nature du triangle  $OEE_0$ ? En déduire une expression du segment  $[EE_0]$  à l'aide des relations trigonométriques, puis du périmètre de l'hexagone extérieur.
3. En déduire un encadrement de  $\pi$ .

... et enfin un polygone quelconque!



On considère maintenant un polygone régulier de  $n$  côtés.

1. Que vaut l'angle au centre d'un tel polygone? En déduire la longueur d'un côté du polygone intérieur, puis son périmètre.
2. Comme précédemment, on remarque que le triangle formé par le centre du polygone et deux points du polygone extérieur (tel que l'un d'eux est situé sur le cercle) est un triangle rectangle. En déduire la longueur d'un côté du polygone extérieur, puis son périmètre.
3. En déduire un encadrement de  $\pi$  pour un polygone à  $n$  côtés.
4. Tracer les deux courbes  $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  et  $g(x) = x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$  dans une même fenêtre, pour des valeurs de  $x$  allant de 3 à 20. Que constate-t-on? Comment obtenir une approximation plus précise de  $\pi$ ?

Avec un peu de python!

On aimerait réaliser un algorithme qui calcule l'écart entre les deux bornes de l'encadrement, et renvoie le nombre de côtés du polygone pour lequel cet écart dépasse une valeur  $p$ .

Combien de côtés comporte le polygone pour lequel la différence entre le périmètre extérieur et le périmètre intérieur est inférieure à 0,01?