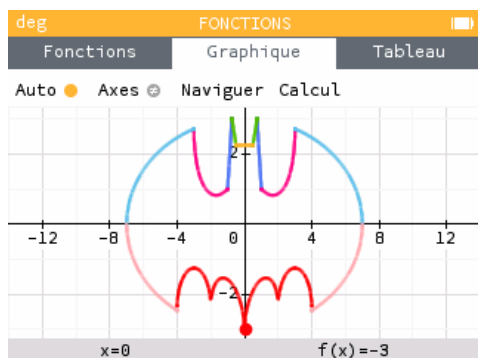


Fonction Smile

Contexte



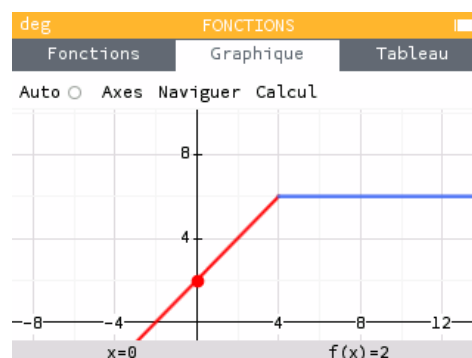
En 2011, un phénomène s'est répandu sur Internet auprès de tous les amoureux des mathématiques : un professeur était parvenu à reproduire la chauve-souris de Batman à l'aide d'une unique équation mathématique. On peut simplifier cette équation en 6 équations plus petites et le principe paraît alors simple : chaque équation permet de représenter un morceau du dessin.

Fonctions définies par morceaux

Une fonction définie par morceaux est une fonction dont la définition diffère en fonction de son domaine de définition. On propose par exemple la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 4 \\ 6 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Sur la calculatrice, on entre deux fonctions distinctes, cependant on utilise le menu de chacune de ces fonctions pour modifier leur domaine de définition.



Fonction valeur absolue

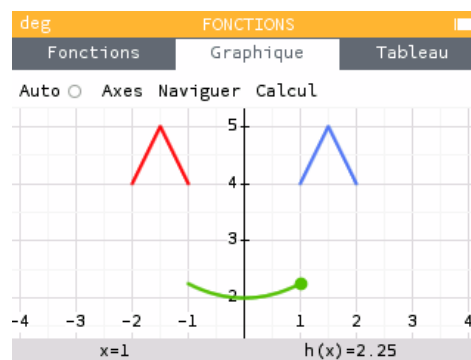
On connaît la notation de la valeur absolue. On l'utilise, par exemple, pour exprimer la distance entre deux points. Sa valeur est toujours positive. Ainsi, la fonction valeur absolue est une fonction définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } \geq 0 \end{cases}$$

1. Quelle est la parité de la fonction valeur absolue?
2. On aimerait modifier la fonction afin que sa représentation graphique soit inversée par rapport à l'axe des abscisses et que la "pointe" soit dirigée vers le haut. Quelle est la définition de cette nouvelle fonction?
3. On aimerait maintenant modifier la fonction initiale afin que sa représentation graphique soit décalée vers le haut. Proposer une fonction qui remplisse cette condition.
4. Même question pour que la représentation graphique de la fonction soit décalée vers la droite.
5. Même question pour que la représentation graphique de la fonction soit plus ou moins évasée.

La fonction smile

On propose d'écrire une fonction mathématique définie en trois morceaux dont la représentation graphique sera un visage stylisé.



1. Au vu de leur représentation graphique, de quels types seront les fonctions associées aux yeux? Et au sourire?
2. Rechercher des exemples de fonctions dont le résultat s'approche des éléments du dessin proposé.
3. Proposer une fonction $f(x)$ définie par morceaux qui respecte la symétrie demandée.
4. Pour les élèves les plus intrépides : on cherche à reproduire très exactement le dessin précédent. L'oeil droit admet un sommet en $y = 5$ et passe par les points de coordonnées $(1; 4)$ et $(2; 4)$. Établir le système d'équations correspondant à l'énoncé et le résoudre.

Valeurs “interdites” et ensemble de définition

Comme nous l'avons expliqué en introduction, la fonction de Batman est une fonction unique, et surtout, une fonction qui n'est pas définie par morceaux. Son expression est telle qu'elle n'admet de représentation graphique que sur des intervalles restreints. Nous allons nous intéresser à l'un des extraits de cette équation :

$$f(x) = 2,25 \sqrt{\frac{|(x - 0,5)(x + 0,5)|}{(0,5 - x)(0,5 + x)}}$$

Quelle est la représentation graphique de cette fonction? Quel est son ensemble de définition? Commenter l'utilisation d'une telle expression.