Croissance bactérienne

On considère une bactérie en phase de croissance, présente initialement en quantité N_0, qui se divise pendant un temps t. Cela signifie qu'à chaque division, la cellule-mère se scinde en deux cellules-filles.

1. On s'intéresse à l'évolution de la population de bactéries.

   (a) Combien compte-t-on de bactéries après une génération (ou division) ? Après deux générations ?

   Après une génération, on compte $2N_0$ bactéries. Au bout de deux générations, on en compte $4N_0$ car la population a encore doublé.

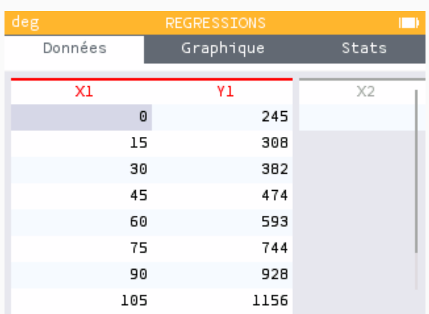
   (b) Quelle est la relation entre N_n, le nombre de bactéries au bout de n générations, et N_0, le nombre de bactéries initial ?

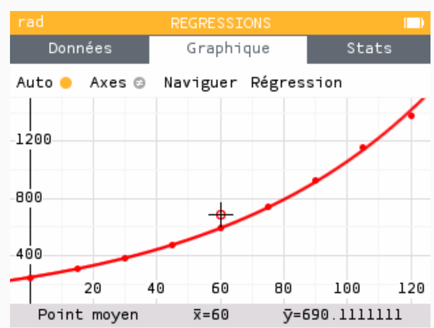
   On reconnaît une suite géométrique de raison 2, d'où $N_n = N_0 \times 2^n$

   Voici les données expérimentales qui ont été recueillies. On donne t en minutes et le nombre de bactéries en milliers :

t	0	15	30	45	60	75	90	105	120
N	245	308	382	474	593	744	928	1 156	1 381

2. Entrer ces données dans l'application Régressions, et vérifier que les données suivent bien une croissance exponentielle en sélectionnant le modèle de régression adapté (touche OK dans Graphique).





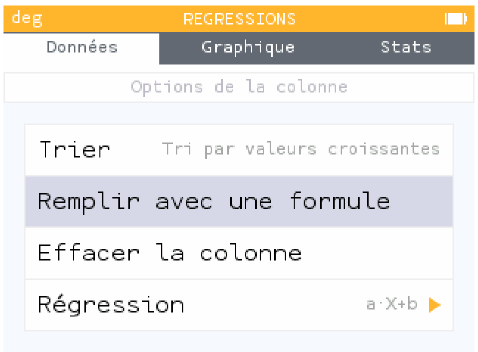
3. On appelle k le taux de croissance des bactéries, c'est-à-dire le nombre de divisions par unité de temps. On a donc $n = kt$ et $N = N_0 \times 2^{kt}$. Montrer que : $\ln N = \ln N_0 + kt \ln 2$

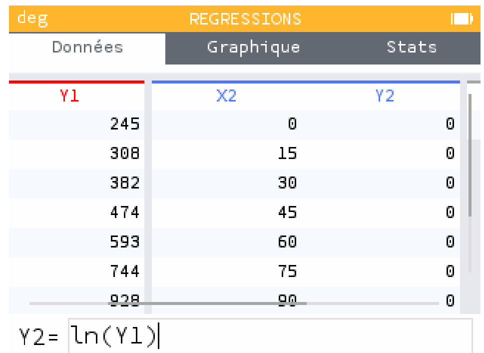
   On sait que $N = N_0 \times 2^{kt}$ d'où $\ln N = \ln N_0 + \ln 2^{kt} = \ln N_0 + kt \ln 2$.

4. D'après cette expression, conjecturer la représentation graphique de $\ln N$ en fonction de t.

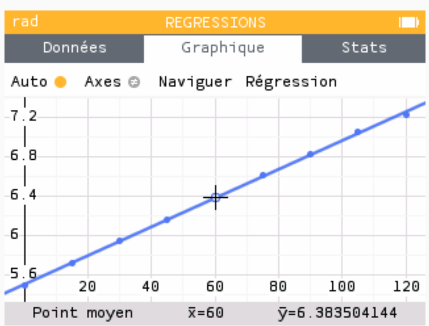
   L'expression est de la forme $y = mt + p$ donc sa représentation graphique sera vraisemblablement une droite de coefficient directeur $k \ln 2$ et d'ordonnée à l'origine $\ln N_0$.

5. On propose de réaliser une nouvelle régression en représentant maintenant ln N en fonction de t.
Dans l'onglet Données de l'application, nous allons réutiliser les mêmes valeurs en X1 et en X2 : on sélectionner la cellule X2, toucke OK, puis `Remplir avec une formule > Vide`. En appuyant sur la touche (copy var), on retrouve dans le sous-menu Listes les données de la colonne X1 afin d'entrer `X2=X1`.
Pour les valeurs de Y2, nous allons réutiliser les valeurs de Y1 en appliquant le même procédé avec un logarithme. On sélectionne Y2, touche OK, remplir avec une formule : `Y2 = ln(Y1)`.





Désactiver les données du premier tableau (en sélectionnant la cellule X1, touche OK puis décocher `Afficher la série`) et vérifier votre conjecture en effectuant une régression sur les données du second tableau.
Une fois la courbe de régression affichée, appuyer sur (OK) pour obtenir des informations complémentaires. Quelle est la valeur du coefficient directeur à 10^{-3} près ?



On obtient un coefficient directeur égal à 0,015.

6. En déduire une expression de $N(t)$.

ln N = ln $N_0 + k \ln 2t \iff N = N_0 e^{k\ln 2t}$ avec $k \ln 2 = 0,015$. D'où $N(t) = 245e^{0,015t}$

7. Quelle est la limite de la fonction $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Ce modèle mathématique est-il cohérent pour décrire toute la dynamique de croissance des bactéries dans un milieu donné ?

La limite de la fonction est infinie. Cela impliquerait que les bactéries se divisent à l'infini, ce qui n'est ni vrai, ni possible. En effet, les bactéries nécessitent un certain nombre de ressources pour survivre et se diviser. Or, les ressources en un milieu donné ne sont pas illimitées, elles vont finir par manquer et, sans apport extérieur, la croissance des bactéries va ralentir puis la population, décliner.

Ce modèle ne permet de décrire qu’une phase du processus de croissance des bactéries : la phase dite de **croissance exponentielle**.