

Datation archéologique

On considère un échantillon de matière organique. Celui-ci contient à l'instant t ($t \geq 0$), $N(t)$ noyaux radioactifs.

1. On sait que la vitesse de désintégration des noyaux $N'(t)$ est décroissante et proportionnelle (de coefficient λ positif et non-nul) au nombre de noyaux radioactifs. Établir l'équation différentielle correspondante.

La fonction est décroissante, donc la dérivée est négative, d'où : $N'(t) = -\lambda N(t)$

2. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le nombre de noyaux radioactifs est égal à N_0 . Résoudre l'équation différentielle.

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant dont la solution est de la forme $Ce^{-\lambda t}$ avec C constante. Pour trouver la valeur de cette constante, on s'intéresse aux conditions initiales :

$$N(0) = Ce^0 = C = N_0$$

D'où : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

3. Le temps de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ est définie comme étant le temps au bout duquel le nombre de noyaux radioactifs est divisé par deux. Établir l'équation correspondante et en déduire une expression de $t_{\frac{1}{2}}$.

$$N\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{N_0}{2} \iff e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \iff t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

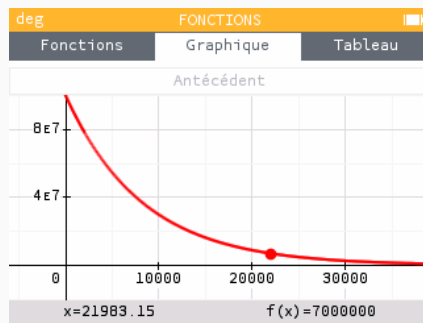
4. Établir une expression afin de connaître l'âge d'un échantillon radioactif en fonction de sa demi-vie et de son nombre de noyaux radioactifs à l'instant t .

On cherche t ($t \geq 0$) tel que :

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t} \iff -\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right) t = \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \iff t = -\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \times \left(\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\right)$$

On pourra faire remarquer que l'expression $\frac{N(t)}{N_0}$ est inférieure à 1, d'où un logarithme négatif et une expression de t positive.

5. On s'intéresse à un échantillon organique qui comprend $7,00 \times 10^6$ noyaux radioactifs. Initialement, il en contenait $1,00 \times 10^8$. Quel est l'âge de cet échantillon ? On rappelle que le temps de demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans.



En utilisant l'expression précédente, on obtient :

$$t = -\ln\left(\frac{7,00 \times 10^6}{1,00 \times 10^8}\right) \times \left(\frac{5730}{\ln 2}\right) = 2,20 \times 10^4$$

L'échantillon est donc âgé d'environ 22 000 ans.