Datation archéologique

On considère un échantillon de matière organique. Celui-ci contient à l'instant $t\ (t \geq 0)$, $N(t)$ noyaux radioactifs.

1. On sait que la vitesse de désintégration des noyaux $N'(t)$ est décroissante et proportionnelle (de coefficient λ positif et non-nul) au nombre de noyaux radioactifs. Établir l'équation différentielle correspondante.

   La fonction est décroissante, donc la dérivée est négative, d'où : $N'(t) = -\lambda N(t)$

2. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le nombre de noyaux radioactifs est égal à N_0. Résoudre l'équation différentielle.

   Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant dont la solution est de la forme $C\mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec C constante. Pour trouver la valeur de cette constante, on s'intéresse aux conditions initiales :
   $$N(0) = C\mathrm{e}^0 = C = N_0$$
   D'où : $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$

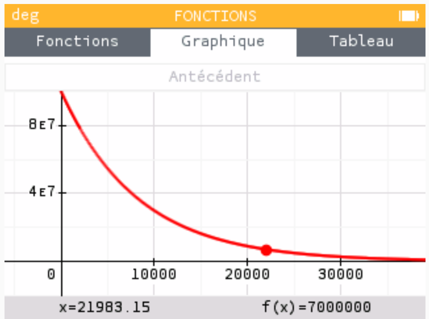
3. Le temps de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ est définie comme étant le temps au bout duquel le nombre de noyaux radioactifs est divisé par deux. Etablir l'équation correspondante et en déduire une expression de $t_{\frac{1}{2}}$.

   $$N\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{N_0}{2} \iff \mathrm{e}^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \iff t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

4. Établir une expression afin de connaître l'âge d'un échantillon radioactif en fonction de sa demi-vie et de son nombre de noyaux radioactifs à l'instant t.

   On cherche $t\ (t \geq 0)$ tel que :
   $$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t} \iff -\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right)t = \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \iff t = -\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \times \left(\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\right)$$
   On pourra faire remarquer que l'expression $\dfrac{N(t)}{N_0}$ est inférieure à 1, d'où un logarithme négatif et une expression de t positive.

5. On s'intéresse à un échantillon organique qui comprend $7,00 \times 10^6$ noyaux radioactifs. Initialement, il en contenait $1,00 \times 10^8$. Quel est l'âge de cet échantillon ? On rappelle que le temps de demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans.



En utilisant l'expression précédente, on obtient :

$$t = -\ln\left(\frac{7,00\times10^6}{1,00\times10^8}\right)\times\left(\frac{5730}{\ln 2}\right) = 2,20\times10^4$$

L'échantillon est donc âgé d'environ 22 000 ans.