# Indice de Gini

L'**indice de Gini**, ou **coefficient de Gini**, est un indicateur statistique permettant d'étudier la répartition d'une variable au sein de la population. On l'utilise fréquemment pour mesurer les inégalités. Par exemple, son calcul permet d'étudier la répartition des salaires, du patrimoine ou de l'impôt sur le revenu dans une population.
Cet outil a été développé par la statisticien Corrado Gini et prend la forme d'un nombre compris entre 0 et 1.

## Courbe de Lorenz

L'indice de Gini se calcule à partir d'une courbe de Lorenz.
La courbe de Lorenz, du nom de son inventeur, est une représentation graphique permettant de visualiser la distribution d'une variable au sein d'une population.
Pour qu'une fonction puisse modéliser une telle répartition, elle doit obéir à plusieurs critères :
- La fonction doit être continue, croissante et convexe sur $[0;1]$ ;
- $f(0)=0$ et $f(1)=1$ ;
- $f(x) \leq x$ sur $[0;1]$.

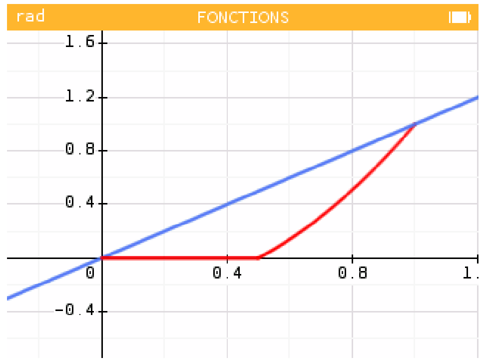
On s'intéresse à la fonction $f$ définie telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;0.5[ \\ \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [0.5;1] \end{cases}$$

On souhaite, dans un premier temps, montrer que la courbe représentative de la fonction $f$ est bien une fonction de Lorenz.

1. On admet que la fonction est continue sur l'intervalle $[0;1]$. Montrer qu'elle est croissante et convexe sur ce même intervalle.
2. Vérifier que $f(0)=0$ et $f(1)=1$, puis dessiner le tableau de variation sur la fonction sur $[0;1]$.
3. On propose d'étudier sur l'intervalle $[0;1]$, le signe de la différence $x - f(x)$.
   En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction $f(x)$ et de la droite d'équation $y = x$.

Une fois ces éléments démontrés, notre fonction peut être utilisée pour modéliser la répartition d'une variable. Afin de comprendre le calcul du coefficient de Gini, nous allons maintenant pouvoir tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction $f$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

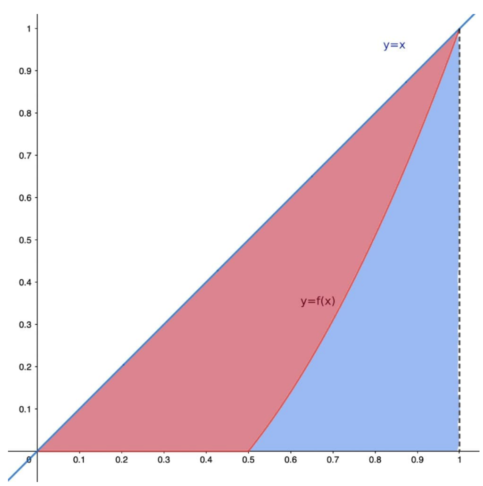



## Indice de Gini

On s'intéresse à la répartition du patrimoine au sein d'une population, modélisée par la fonction $f$ définie telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 0.5[ \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0.5; 1] \end{cases}$$

1. Le point de coordonnées $(0,75; 0,25)$ se trouve sur la courbe : cela signifie que les 75% de la population les plus modestes se partagent 25% du patrimoine. Déterminer le pourcentage de la population qui se partage les premiers 80% du patrimoine.
2. On a représenté sur notre graphique la droite d'équation $y = x$. Pourquoi cette droite représente-t-elle la répartition la plus égalitaire possible ?
3. L'**indice de Gini** correspond au rapport de l'aire située entre la courbe de Lorenz et la droite (en rouge sur le graphique), que l'on appelle **aire de concentration**, par rapport à l'aire située entre la droite et l'axe des abscisses (soit la somme des surfaces bleue et rouge ci-dessous, l'équivalent d'un triangle de 0.5 unité d'aire).



On a indiqué précédemment que cet indice prenait une valeur comprise entre 0 et 1. Quelle interprétation pourrait-on faire d'un indice de Gini égal à 0 ou à 1 ?

4. Calculer $\int_{0.5}^{1} f(x)\mathrm{d}x$. En déduire la valeur du coefficient de Gini.
5. Une population voisine possède un indice de Gini égal à 0,42 pour la même variable. La répartition est-elle plus égalitaire ?