Calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles

On s'intéresse à l'aire comprise sous la représentation graphique d'une fonction définie sur l'ensemble des réels par :

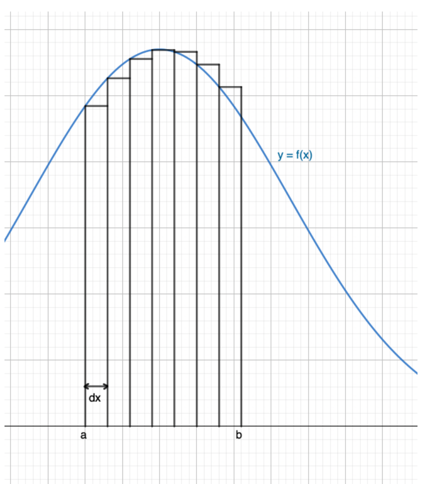
$$f(x) = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-170)^2}{98}}$$

Cette fonction étant très complexe à primitiver, nous allons programmer une fonction en Python qui nous permettra d'aboutir à une bonne approximation de la valeur recherchée.

Etude de la fonction

1. Calculer les limites de la fonction $f(x)$ aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction.
3. Représenter graphiquement la courbe sur l'intervalle $[140; 200]$.

Approximation par la méthode des rectangles



On procède à un découpage de la courbe par rectangles de largeur identique dx, tout comme sur le dessin ci-contre.
L'objectif est d'obtenir une approximation de la surface comprise sous la courbe entre a et b en faisant la somme des aires des rectangles.

1. Que faut-il faire pour que l'approximation obtenue soit la plus proche possible du résultat recherché ?
2. On considère l'aire comprise sous la courbe $f(x)$ entre deux abscisses a et b. Exprimer la largeur dx en fonction de a, b et le nombre n de rectangles découpant cet espace.
3. Exprimer en fonction de f la hauteur du premier rectangle au point d'abscisse a. Quelle est la hauteur du second rectangle situé au point d'abscisse $a + dx$?

4. On propose d'écrire une fonction `approx_rect(n,x_inf,x_sup)` permettant de calculer l'intégrale d'une fonction $f(x)$ (que l'on aura préalablement définie dans une autre fonction) entre deux bornes x_{inf} et x_{sup} par un découpage en n rectangles.
   On utilisera dans ce programme deux variables : `x`, qui évolue entre les deux bornes, et `somme`, qui stocke la somme des rectangles au cours du calcul. Comment sont initialisées ces deux variables au début du programme ?
5. Compléter l'algorithme suivant afin d'obtenir le résultat souhaité :

```
from math import *
def f(x):
  return (1/(7*sqrt(2*pi)))*exp(-((x-170)**2)/98)
def approx\_rect(n,x\_inf,x\_sup):
  somme= ...
  x= ...
  dx= ...
  while(x< ... ):
    somme=somme+dx*f(x)
    x+=dx
  return ...
```

Exécution de l'algorithme et loi normale

1. Quelle valeur obtient-on lorsque l'on exécute le programme pour les valeurs $n = 5000$, $x_{inf} = 120$ et $x_{sup} = 230$? La fonction $f(x)$ est ce que l'on appelle une **fonction de densité**, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une fonction continue et positive sur un intervalle et telle que son intégrale sur cet intervalle est égal à 1. Dans ce cas particulier, la courbe en cloche que l'on obtient lorsque l'on représente graphiquement cette fonction est appelée **courbe de Gauss**.
   Les courbes de Gauss sont utilisées car elle traduisent une réalité statistique souvent observée sur des grandes populations pour des phénomènes aléatoires : les effectifs se répartissent autour d'une valeur centrale en suivant une courbe en cloche dont on peut connaître l'équation. C'est vrai lorsque l'on s'intéresse à la masse exacte d'un grand nombre de boîtes d'une même conserve, ou à la taille des chats adultes en région parisienne. On dit que leur répartition suit une **loi normale**.
2. Dans notre cas, la fonction de densité $f(x)$ permet d'étudier la répartition des tailles des adultes dans la population française, de moyenne $\mu = 170$ (cm) et d'écart-type $\sigma = 7$(cm).
   Comment interpréter le nombre obtenu lorsqu'on a exécuté le programme entre 120 et 230 ?
3. Exécuter le programme pour $n = 5000$, $x_{inf} = \mu - \sigma$ et $x_{sup} = \mu + \sigma$. Comment interpréter ce résultat ?
4. Même question pour une exécution entre $x_{inf} = \mu - 2\sigma$ et $x_{sup} = \mu + 2\sigma$.
5. Rendez-vous maintenant dans l'application Probabilités de la calculatrice : sélectionner Normale dans le menu puis entrer les paramètres μ et σ définis plus haut. Modifier l'icône en haut à gauche de façon à sélectionner le second dessin, puis encadrer X entre 156 et 184. Et maintenant… admirez !