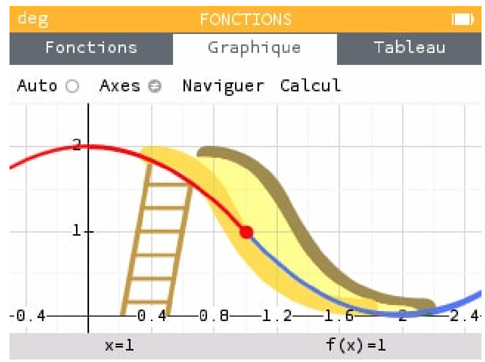
Toboggan et convexité

Construction du toboggan

On cherche à construire un toboggan à partir de deux fonctions du second degré comme dans l'exemple ci-contre. La première courbe passe les points de coordonnées (0;2) et (1;1). La seconde courbe passe par les points de coordonnées (1;1) et (2;0).



1. En utilisant les données de l'énoncé, établir les équations de ces deux fonctions du second degré.

   Pour la parabole n°1, on cherche une fonction de la forme $ax^2 + bx + c$ passant par le point de coordonnées (1;1) et de sommet (0;2). Il en vient le système d'équations suivant :

   $$\begin{cases} a+b+2=1 \\ \frac{-b}{2a}=0 \end{cases}$$

   On obtient $f(x) = -x^2+2$. Pour la parabole n°2, on cherche une fonction de la forme ax^2+bx+c passant par le point de coordonnées (1;1) et de sommet (2;0). Il en vient le système d'équations suivant :

   $$\begin{cases} a+b+c=1 \\ \frac{-b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases}$$

   On obtient $g(x) = x^2-4x+4$.

2. Quelle est la condition pour que la transition d'une courbe à l'autre se fasse de la manière la plus douce possible ? Vérifier cette condition.

   Pour la transition se fasse en douceur, il faut que les tangentes soit identiques au point de jonction des deux courbes, c'est à dire en (1;1). On calcule les deux fonctions dérivées : $f'(x) = -2x$ et $g'(x) = 2x-4$. On a bien $f'(1) = g'(1)$.

3. Il est possible d'obtenir le tracé souhaité à l'aide d'une seule fonction de degré 3, de la forme $h(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Déterminer les valeurs de a, b, c et d.

On cherche à résoudre un système d'équations en tenant compte, par exemple, des informations suivantes : $f(0)=2$, $f'(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'(2)=0$. On obtient $h(x)=0,5x^3-1,5x^2+2$.

Toboggan et convexité

On appelle $h(x)$ la fonction définie précédemment sur l'intervalle $[0;2]$.

1. Tracer la fonction sur la calculatrice. Faire apparaître la tangente à la courbe au point $x=0$ et la faire glisser (en appuyant sur la flèche droite) jusqu'en $x=2$. Décrire la position des tangentes par rapport à la courbe. Qu'observe-t-on en $x=1$?

   Entre $x=0$ et $x=1$, on observe que les tangentes sont situées au-dessus de la courbe. En $x=1$, la tangente traverse la courbe. Entre $x=1$ et $x=2$, les tangentes sont situées en-dessous de la courbe.

2. Décrire l'évolution de la pente tout le long du toboggan. Quelle différence peut-on observer entre 0 et 1 puis entre 1 et 2 ? Que ressentirait quelqu'un qui emprunterait ce toboggan ?

   Entre $x=0$ et $x=1$, la fonction est décroissante et cette décroissance s'accélère. La dérivée, négative, est de plus en plus faible. Entre $x=1$ et $x=2$, la fonction est toujours décroissante mais cette décroissance ralentit. La dérivée, négative, est de plus en plus proche de 0. Quelqu'un qui emprunterait le toboggan sentirait une accélération sur la première partie du toboggan et une décélération sur la deuxième.

3. Faire un tableau de signe de la dérivée seconde, c'est à dire la dérivée de la fonction $h'(x)$, entre 0 et 2.

   On commence par calculer la dérivée seconde : $h''(x)=\left(3\times 0,5x^2-2\times 1,5x\right)'=2\times 1,5x-3=3x-3$.

x	0		1		2
signe de $h''(x)$		$-$	0	$+$	

4. Conclure.

   Lorsque la dérivée seconde est négative sur un intervalle, les tangentes sont situés au-dessus de la courbe. La fonction dérivée est décroissante : une fonction croissante croît moins vite, une fonction décroissante décroît plus vite. On dit que la fonction est concave. Lorsque la dérivée seconde est positive sur un intervalle, les tangentes sont situées au-dessous de la courbe. La fonction dérivée est croissante : une fonction croissante subit une accélération, une fonction décroissante ralentit. On dit que la fonction est convexe.