

Le jeu de Josèphe - Un problème ancien

NUMWORKS

Cet exercice ainsi que sa correction est proposé par **Philippe Moutou**. Il enseigne au lycée Henri IV à Paris.

1 Exercice

Josèphe fut amené à se disposer en cercle avec quarante personnes, sachant qu'en comptant de trois en trois à partir de l'un d'eux, ils devaient se supprimer mutuellement.

Le premier à être supprimé est rangé en position 3 et il se fait supprimer par celui qui est rangé en position 6 ; celui-ci est le suivant à être supprimé, par celui en position 9.

Ainsi de suite, progressivement, toute la troupe est appelée à s'autodétruire. À quelle place doit se ranger Josèphe pour être le dernier et devoir ainsi se supprimer lui-même ?

2 Corrigé

Commençons par construire la liste `initial` des 41 numéros (de 1 à 41) attribués aux personnes en cercle. Dans cette liste, on supprime un numéro sur 3 avec la fonction `pop(rg)` qui élimine le numéro de rang `rg` et on enregistre ce numéro dans la liste `ordre`. La longueur de la liste `len(initial)` changeant à chaque suppression d'une personne, pour savoir le rang `rg` de la prochaine personne à supprimer, on ajoute `p - 1` à l'ancien rang (le nombre de personnes sautées) et on se ramène au début de la liste en examinant le reste de la division par `len(initial)`. En effet, arrivés en fin de la liste, il faut continuer comme si le 1er était derrière le dernier. La boucle `while` qui contient ces deux instructions assure que le processus ne s'achève qu'avec la suppression de la dernière personne. En remplaçant 41 et 3 par les lettres `n` et `p`, ce programme pourra être réutilisé avec d'autres valeurs.

```
n,p,rg=41,3,0
initial=list(range(1,n+1))
ordre=[]
while len(initial)>0:
    rg=(rg+p-1)%len(initial)
    ordre.append(initial.pop(rg))
print('Ordre de decimation:', ordre)
# pour savoir dans quel ordre seront supprimees les personnes
passage=n*[0]
for i in range(n):
    passage[ordre[i]-1]=i+1
print('Ordre de passage:', passage)
```

```
deg PYTHON
>>> from josephe import *
Ordre de decimation : [3, 6, 9,
11, 25, 2, 22, 4, 35, 16, 31]
Ordre de passage: [14, 36, 1,
19, 8, 35, 27, 9, 20, 32, 10,
>>>
```

D'après le résultat, Josèphe doit se mettre en 31ème position pour avoir le privilège d'être le dernier à s'autodétruire comme le capitaine d'un navire en perdition qui met un point d'honneur à être le dernier à le quitter. La liste 'passage qui a été ajoutée à la fin du programme nous donne le rang de l'exécution de chaque personne : le 1er est tué en 14ème, le 2ème est tué en 36ème, le 3ème en 1er, etc.

Ce problème me fait penser à ces ritournelles enfantines où l'on se met en cercle pour désigner celui qui sera le chat (ou que sais-je d'autre) au début de la partie : « plouf plouf, une poule en or c'est toi qui sort » ou bien la plus obscure formule « amstragram pic et pic et colegram bour et bour et ratatam, mistragram » (je ne suis pas bien sûr de la fin, je cite de mémoire, j'ai trouvé sur internet cette comptine qui termine par « pic » au lieu de « mistragram »). Tout ça pour dire que le problème de Josèphe se retrouve, de façon moins dramatique, dans nos vies d'enfant.

```
deg PYTHON
>>> from josephe import *
Ordre de decimation : [5, 2, 3, 1, 4]
Ordre de passage: [4, 2, 3, 5,
>>>
```

À quel rang faut-il être pour être choisi (équivalent de supprimé en dernier)? Supposons donc que nous sommes 5 joyeux bambins et que nous faisons la « plouf », une comptine qui fait 10 pieds si je ne m'abuse. J'entre $n=5$ et $p=10$ dans le programme et trouve qu'il faut me mettre en avant-dernier (la position 4).

Une question intéressante : se peut-il toujours que cette procédure de sélection commence et finisse sur la même personne? Le nombre n de personnes étant connu, comment choisir le pas p pour que le 1er soit le dernier? La réponse n'est pas évidente sans le programme. Prenons $n=5$ personnes, cela arrive pour la 1ère fois pour $p=4$.

Mais si on augmente la valeur de p , d'autres valeurs possibles continuent à arriver. La suivante est $p=8$, ensuite il faut attendre jusqu'à $p=15$, etc. Pour éviter de relancer le programme à chaque fois, j'écris une boucle qui le fait automatiquement. Je trouve alors la liste des valeurs possibles pour p quand $n=5$, qui semble ne pas avoir de fin : 4, 8, 15, 18, 19, 22, 29, 33, 37, 47, ...

Et pour les autres valeurs de n ? Il semble que ce soit toujours possible, parfois le plus petit pas possible est plus grand que n (pour $n=3, 7, 11, 13, 18, 19, 27, 34, 35, \dots$), la liste est fort irrégulière. Je regarde par curiosité si cette liste est répertoriée dans l'Encyclopédie des suites d'entiers de Sloane. Non, pas encore. D'autres y sont, comme 2, 5, 2, 4, 3, 11, 2, 3, 8, etc. qui est la liste des premières valeurs de p pour que le premier soit le dernier (liste est référencée A187788).

Les références de cette histoire sont complexes : il y eu tout d'abord ce qu'en dit Josèphe lui-même. Ce personnage du 1er siècle parle de tirer au sort l'ordre des tués et mentionne que c'est le voisin qui procède à l'exécution (et non pas un sur trois, ce qui paraît plus logique). Si Josèphe se retrouve en dernier c'est le fruit du hasard... Ensuite, il y eut ce livre de Bachet *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* (1612) qui présente une situation différente mais qui repose sur le même algorithme : 15 chrétiens et 15 turcs dans un bateau trop chargé ; il faut jeter 15 hommes à la mer et on se fie au sort en jetant un homme sur neuf à la mer, les hommes étant rangés en cercle. La question « à quelles places mettre les chrétiens, pour qu'aucun d'eux ne soit jeté à la mer » se traite par le même algorithme. Bachet de Méziriac (1581-1638) aurait reformulé dans son livre ce que Nicolas Chuquet (1445-1487) avait publié en 1484 (problème 146 de son livre, édité pour la 1ère fois en 1880). L'idée de sauter deux hommes sur trois daterait de Cardan, *Practica Arithmeticae*, publié en 1536 ("on connaît le jeu de Josèphe, qui avec celui-ci infligea la mort à ses compagnons de telle sorte que, dit-on, ceux-ci pensaient qu'elle leur arrivait par le sort, tandis que lui-même, vu que ceux-ci étaient pris au dépourvu, a été sauvé avec un compagnon seulement ; on dispose en cercle autant de petits cailloux qu'on le souhaite et pour deux comptés on en fait sortir un que l'on a choisi"). J'ai tiré ces informations d'un article de Laurent Signac.