

Arithmétique et listes en compréhension

NUMWORKS

La fonction modulo (notée `%`, disponible dans la **Toolbox**) donne le reste dans la division euclidienne du nombre situé avant le `%`, par le second nombre. Par exemple, si on effectue la division de 23 par 10, le reste est 3, ce qui se note `23%10==3`. Cela suppose que les opérandes sont des entiers. La divisibilité peut se tester à l'aide de cette opération :

On dit que a est divisible par b , ou que a est un multiple de b , si `a%b==0`.

Par exemple, pour obtenir la liste des multiples de 3 entre 0 et 20, on peut écrire la liste en extension : `[0,3,6,9,12,15,18]` ou la décrire en compréhension : `[t for t in range(20) if t%3==0]`. On dit qu'on a filtré la liste des entiers inférieurs à 20, par la fonction booléenne "est multiple de 3". Cette notion est fondamentale en programmation fonctionnelle et dans les algorithmes de Big Data.

1 Exercices préliminaires

Décrire en compréhension la liste des entiers pairs de 2 chiffres.

Décrire en compréhension la liste des nombres inférieurs à 100 qui sont multiples, ou bien de 5, ou bien de 7.

Décrire en compréhension la liste **fizzbuzz** des entiers inférieurs à 100 qui sont multiples de 5 ou de 7 mais pas de 5 et 7 en même temps.

Si le temps le permet, programmer le crible d'Eratosthène avec des compréhensions.

2 Exemples

Les compréhensions permettent de programmer facilement les fonctions suivantes :

- **inter**, qui accepte deux listes **l1** et **l2** en entrée, et renvoie l'intersection des deux listes, c'est-à-dire la liste des éléments communs à **l1** et **l2**;
- **divisors**, qui accepte un entier **n** en entrée, et renvoie la liste de ses diviseurs

Pour les tester, créer un module Python appelé **divisors.py** et y entrer ceci :

```
def inter(l1,l2):
    return [x for x in l1 if x in l2]
def divisors(n):
    return [d for d in range(1,n+1) if n%d==0]
```

```
deg PYTHON
>>> from divisors import *
>>> inter(range(3,8),range(5,13))
[5, 6, 7]
>>> divisors(2018)
[1, 2, 1009, 2018]
>>> |
```

Ensuite, retourner dans la console interactive et y entrer `inter(range(3,8),range(5,13))` pour savoir quelle est l'intersection des listes `[3,4,5,6,7]` et `[5,6,7,8,9,10,11,12]`. Pour savoir quels sont les diviseurs de 2018, faire `divisors(2018)`.

```
deg PYTHON
>>> from divisors import *
>>> for n in range(9):print(d-
[]
[1]
[1, 2]
[1, 3]
[1, 2, 4]
[1, 5]
[1, 2, 3, 6]
[1, 7]
[1, 2, 4, 8]
>>> |
```

On peut voir à quoi ressemblent des listes de diviseurs pour plusieurs entiers, en appelant la fonction `print()` dans une boucle comme `for n in range(9):print(divisors(n))` laquelle produit l'effet ci-contre.

On voit que l'algorithme est pris en défaut pour 0, qui est affiché n'ayant aucun diviseur alors qu'en réalité c'est tout le contraire : 0 est divisible par tous les autres entiers. Ceci dit, il ne serait pas prudent de demander à la NumWorks d'afficher une liste de taille infinie ! Ensuite, 1 est clairement le seul entier n'ayant qu'un seul diviseur, les autres sont tous divisibles par au moins 1 et eux-mêmes. Ce qui amène à la notion de primalité.

3 Exercice

Rédiger un test de primalité sous forme d'une fonction `estPremier(n)` acceptant en entrée un entier `n`, et renvoyant `True` si `n` est premier, et `False` sinon. On peut faire appel à la fonction `len(L)` qui accepte une liste `L` en entrée et renvoie le nombre de ses éléments, ainsi qu'à l'une des fonctions précédemment définies.

4 Autres exercices

On aborde dans la série d'exercices suivants, la notion de diviseurs communs à deux entiers.

1. Écrire une fonction Python `cd(a, b)` qui accepte deux entiers `a` et `b` en entrée et qui renvoie la liste des diviseurs communs à `a` et `b`. On peut utiliser la fonction `inter()` définie au début de cette activité.
2. En déduire un algorithme «naïf» de calcul du pgcd, qui est le plus grand élément de `cd(a, b)`, comme son nom «plus grand commun diviseur» l'indique. On pourra utiliser la fonction `max(L)` qui accepte en entrée une liste `L` de nombres et renvoie le plus grand élément de cette liste. On demande une fonction `pgcd(a, b)` qui accepte en entrée deux entiers `a` et `b`, et renvoie leur pgcd.
3. En déduire également un test `premiersEntreEux(a, b)` qui accepte en entrée deux entiers `a` et `b` et renvoie `True` si `a` et `b` sont premiers entre eux et `False` s'ils ont un diviseur commun autre que 1. Là encore, la fonction `len` peut être utile, puisque le fait que deux entiers soient premiers entre eux est lié au nombre de leurs diviseurs communs.
4. Déduire de la fonction précédente, une fonction `eulerphi(n)` où `n` est un entier, renvoyant le nombre d'entiers inférieurs à `n` et premiers avec `n`. Par exemple, les nombres inférieurs à 8 et premiers avec 8 sont 1, 3, 5 et 7 ce qui fait que `eulerphi(8)==4`.
5. On dit qu'un entier est parfait si la somme de ses diviseurs est égale à son double. Par exemple, les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 et $1+2+3+6=12$ qui est le double de 6, donc 6 est parfait. Écrire un test de perfection sous la forme d'une fonction Python `estParfait(n)` acceptant un entier `n` en entrée et renvoyant `True` si `n` est parfait et `False` sinon. On pourra utiliser la fonction `sum(L)` acceptant en entrée une liste d'entiers `L` et renvoyant la somme des éléments de cette liste. On a vu que 6 est un nombre parfait. Quels sont les deux suivants?