Attività didattiche con la calcolatrice NumWorks

Alessandra Vaghi

Indice

Prefazione

Quando, nel luglio del 2020, Roberta Rabotti mi ha mandato la calcolatrice grafica NumWorks, come la stragrande maggioranza degli insegnanti di matematica in Italia, ho pensato "e adesso cosa faccio con questa cosa?"
Dal 2018 il MIUR ha ammesso l'uso della calcolatrice grafica senza sistema CAS (Computer Algebra System) all'Esame di Stato e da allora gli insegnanti di matematica hanno avvertito l'esigenza di inserire questo strumento nella loro attività didattica. Abbiamo avuto un anno per "allenarci", poi c'è stato l'Esame di Stato, una pandemia, e quindi non molto tempo per abituarci all'idea...
Una cosa è certa: siamo un'anomalia in Europa! In Francia, Inghilterra, Olanda, Germania e molti altri paesi europei nella scuola secondaria di secondo grado si fa largo uso della calcolatrice grafica con e senza CAS da almeno 25 anni. E' anche vero che ormai una calcolatrice grafica viene percepita come

uno strumento obsoleto. Perché usare una calcolatrice grafica quando posso usare altre 100 applicazioni più efficienti su tablet, cellulare e computer? Semplice: all'Esame di Stato non si possono usare il tablet, il cellulare e il computer, la calcolatrice grafica sì!

In didattica della matematica, seguendo l'approccio strumentale adottato da molti ricercatori tra cui Guin, Trouche, Artigue, Verillon, Rabardel e molti altri, un oggetto come una calcolatrice grafica viene chiamato artefatto fino a quando non diventa uno strumento. Semplificando molto: l'artefatto è l'oggetto in sé (nel nostro caso la NumWorks o una delle sue applicazioni/funzioni), mentre lo strumento è un'entità mista composta in parte dall'artefatto e in parte da una componente cognitiva, ovvero dall'insieme delle conoscenze necessarie per utilizzare l'artefatto e quelle acquisite attraverso l'uso dell'artefatto durante l'esecuzione di un certo compito.
Trasformare un artefatto in strumento è un processo molto complesso denominato genesi strumentale, durante la quale essenzialmente impariamo a utilizzare la NumWorks sia come mero strumento tecnologico, che come vero e proprio supporto al processo di apprendimento.
Durante il processo di genesi strumentale, il ruolo dell'insegnante è fondamentale, egli ha infatti un compito che i ricercatori chiamano orchestrazione strumentale.

E' qui che sorge il vero problema! Gli insegnanti che in Francia devono accompagnare i propri studenti nel percorso di genesi strumentale con una calcolatrice grafica hanno usato uno strumento simile quando erano studenti, hanno pertanto già sviluppato la propria genesi strumentale. In Italia invece, la stragrande maggioranza dei neolaureati in Matematica non ne ha mai usata una.

Pertanto oggi gli insegnanti italiani si trovano davanti a una duplice sfida: sviluppare in autonomia una propria genesi strumentale con obiettivi didattici e accompagnare gli studenti verso un'appropriazione dello strumento.

E' tenendo questo a mente che ho sviluppato queste tre attività. La speranza è che gli insegnanti imparino a utilizzare la NumWorks come strumento di mediazione per orientare l'attenzione degli studenti su dei particolari concetti di Analisi Matematica, e che gli studenti imparino a utilizzarla per anticipare un risultato (come ad esempio il risultato di un limite) e per verificare la correttezza dei loro ragionamenti (ad esempio nello studio di funzione). In altre parole vorrei provare a rispondere, almeno in parte, alla domanda "e adesso cosa faccio con questa cosa?".

Attività 1

Significato di un limite

1.1 Introduzione

In questa attività viene mostrato come inserire sulla calcolatrice NumWorks una **funzione definita a tratti** e come muoversi nella finestra per poter osservare i **limiti sul grafico** della funzione.

Gli **strumenti** utilizzati sono:

- un esercizio svolto

- 3 esercizi simili da proporre alla classe

Gli **obiettivi** di questa attività sono:

- prendere confidenza con la calcolatrice (quali sono i gesti meccanici che devo fare per definire una funzione e tracciarne il grafico)
- leggere i limiti su un grafico

1.2 Esercizio svolto

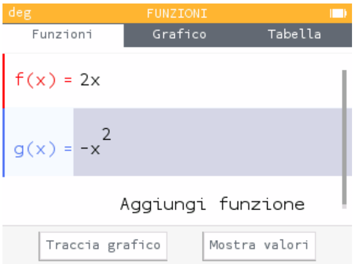
1.2.1 Enunciato

Sulla calcolatrice grafica traccia la funzione $f(x)$ e, osservandone il grafico, stabilisci i valori dei seguenti limiti: $f(x) = 2x$
se $x \leq 1$
$-x^2$ se $x > 1$

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
b. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
c. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$
d. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
e. $\lim_{x \to 1} f(x)$

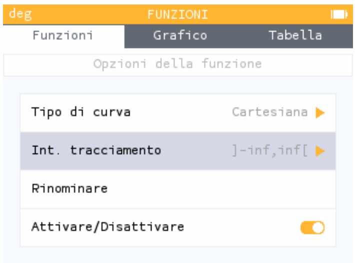
1.2.2 Svolgimento

Nell'applicazione **Funzioni**, inseriamo le funzioni
$f(x) = 2x$
$g(x) = -x^2$



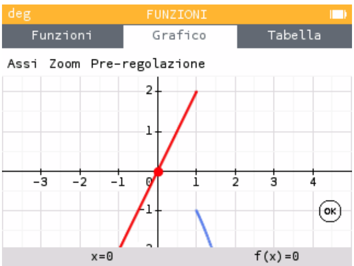
Per cambiare gli *intervalli di definizione*, selezioniamo la funzione $f(x)$ con le frecce direzionali (◁ △ ▽ ▷) e premiamo OK

selezioniamo **Int. tracciamento**

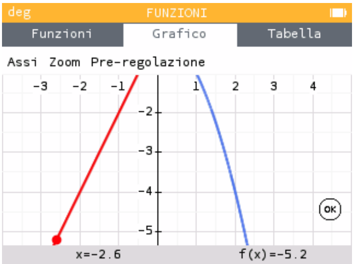


e modifichiamo **Xmax** con 1. Premiamo su **Conferma**.

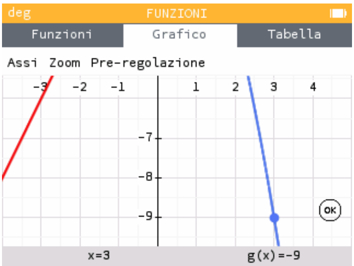
Facciamo la stessa cosa con $g(x)$, ma questa volta modifichiamo **Xmin** con un valore molto vicino a 1, ma comunque maggiore di 1 (ad esempio: 1.001).
Premiamo il tasto ⮌ per tornare alla schermata di inserimento delle funzioni.
Da qui, tracciamo il grafico delle funzioni, utilizzando **Traccia grafico** in basso, oppure **Grafico** in alto, al centro.



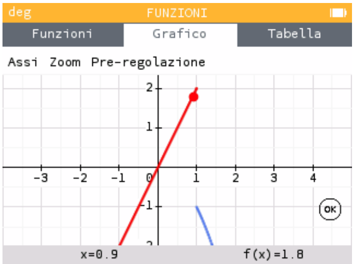
Possiamo muoverci con le frecce ◁ / ▷ per valutare i limiti:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



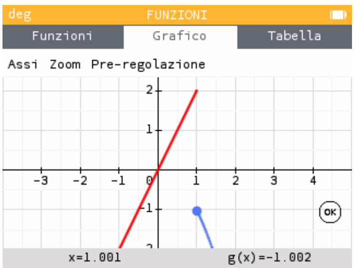
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



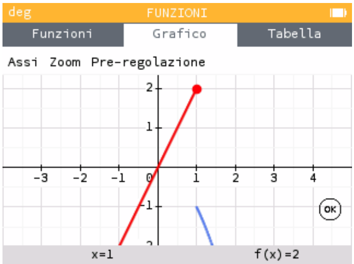
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$



$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$



$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq lim_{x\to 1^-} f(x)$, quindi **la funzione non ha** limite per x che tende a 1.



1.3 Esercizi aggiuntivi

A) Sulla calcolatrice grafica traccia la funzione $f(x)$ e, osservandone il grafico, stabilisci i valori dei seguenti limiti:

$f(x) = x$ se $x \leq 2$
x^2 se $x > 2$

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
b. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
c. $\lim_{x \to 2^-} f(x)$
d. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$
e. $\lim_{x \to 2} f(x)$

B) Sulla calcolatrice grafica traccia la funzione $f(x)$ e, osservandone il grafico, stabilisci i valori dei seguenti limiti:

$f(x) = x^2 - 9$ se $x \neq 3$
0 altrimenti

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
b. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
c. $\lim_{x\to3^-} f(x)$
d. $\lim_{x\to3^+} f(x)$
e. $\lim_{x\to3} f(x)$

C) Sulla calcolatrice grafica traccia la funzione $f(x)$ e, osservandone il grafico, stabilisci i valori dei seguenti limiti:

$$f(x) = \frac{x - |x|}{2x}$$

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
b. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
c. $\lim_{x\to0^-} f(x)$
d. $\lim_{x\to0^+} f(x)$
e. $\lim_{x\to O} f(x)$

Attività 2

Forme indeterminate

2.1 Introduzione

In questa attività viene viene assegnato un limite che, con il **calcolo "a mano"**, restituisce una **forma indeterminata**. Con l'uso della calcolatrice è possibile elaborare una congettura su quale possa essere il limite della funzione.

Gli **strumenti** utilizzati sono:

- un esercizio svolto

- 3 esercizi simili da proporre alla classe

Gli **obiettivi** di questa attività sono:

- usare la calcolatrice per anticipare un risultato (elaborazione di una congettura)
- imparare a utilizzare la calcolatrice come strumento di mediazione per affrontare l'argomento "forme indeterminate"

2.2 Esercizio svolto

2.2.1 Enunciato

Per il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{x^2 + x}$$

1. Esegui il calcolo "a mano" e verifica che si ottiene una forma indeterminata;
2. Con l'aiuto della calcolatrice grafica NumWorks, elabora una congettura sul valore del limite;

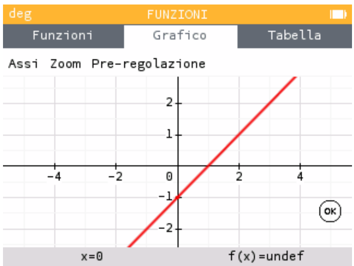
3. Riscrivi la funzione in modo equivalente, ma tale che il limite non sia più una forma indeterminata.

2.2.2 Svolgimento

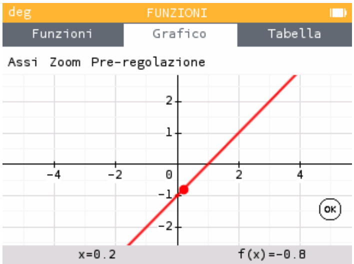
1. Calcoliamo "a mano"

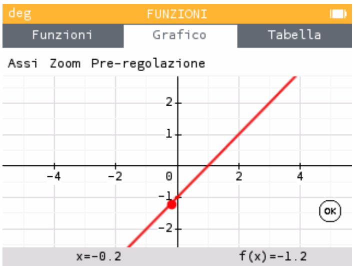
$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x}{x^2+x} = \frac{0^3-0}{0^2+0} = \frac{0}{0}$

2. Sulla calcolatrice grafica NumWorks, nell'applicazione **Funzioni**, traccio il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+x}$ e osserviamo che in x=0 la funzione non è definita:



Tuttavia, per valori sufficientemente vicino a 0, $f(x)$ è vicina a -1:





La nostra congettura è quindi che:
$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x}{x^2+x} = -1$

3. Riscriviamo la funzione in modo equivalente, ma tale che il limite non sia più una forma indeterminata:

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x+1)} =$
$lim_{x\to 0}(x-1) = 0-1 = -1$
Il risultato è -1.

2.3 Esercizi aggiuntivi

Per i seguenti limiti:

1. Esegui il calcolo "a mano" e verifica che si ottiene una forma indeterminata;
2. Con l'aiuto della calcolatrice grafica NumWorks, elabora una congettura sul valore del limite;
3. Riscrivi la funzione in modo equivalente, ma tale che il limite non sia più una forma indeterminata.

A) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^3-3x^2}$

B) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

C) $\lim_{x\to 2}(\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-2x})$

D) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{(x-1)} - \frac{3}{x^2-1})$

E) $\lim_{x\to 2}(\frac{X}{x-2} - \frac{x^2+1}{4-x^2})$

F) $\lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{x^3-1}$

G) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^4-2}{x^3}$

H) $\lim_{x\to \infty} \frac{1-x^2}{x^2-x}$

I) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$

Attività 3

Rapporto incrementale

3.1 Introduzione

In questa attività viene assegnata una funzione e si chiede di calcolare la **derivata prima** in un punto di **ascissa data**.
Con l'uso della calcolatrice NumWorks si può:

- calcolare il **rapporto incrementale** e assegnare via via dei valori sempre più piccoli al parametro h,
- tracciare la **tangente** al grafico nel punto di ascissa assegnato,

- tracciare il grafico della **funzione derivata**,
- calcolare il **valore dell'ordinata** nel punto di ascissa assegnato.

Gli **strumenti** utilizzati sono:

- un esercizio svolto
- alcuni esercizi simili da proporre alla classe

Gli **obiettivi** di questa attività sono:

- comprendere il significato di rapporto incrementale
- comprendere la corrispondenza che c'è tra la derivata prima di un punto e il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto
- familiarizzare con il comando **"diff(f(x),x,x)"**

3.2 Esercizio svolto

3.2.1 Enunciato

Per ciascuna delle seguenti funzioni:

1. Calcola $f'(x0)$ "a mano" utilizzando il limite del rapporto incrementale, poi controlla il risultato sulla calcolatrice grafica
2. Calcola, nell'applicazione **Calcolo**, il rapporto incrementale per valori sempre più piccoli di h
3. Calcola, nell'applicazione **Funzioni**, la retta tangente nel punto di ascissa desiderato
4. Calcola, nell'applicazione **Funzioni**, il valore della funzione derivata nel punto di ascissa desiderato

3.2.2 Svolgimento

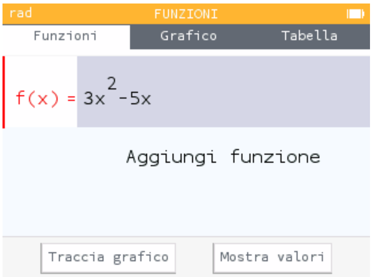
$$f(x) = 3x^2 - 5x \qquad x_0 = 2$$

1. Calcoliamo "a mano" il rapporto incrementale

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{[3(2+h)^2-5(2+h)]-[(3\cdot 2^2-5\cdot 2)]}{h} =$
$= \frac{[3(4+4h+h^2)-10-5h]-[3\cdot 4-10]}{h} =$
$= \frac{12+12h+3h^2-10-5h-12+10}{h} = \frac{3h^2+7h}{h}$
Calcoliamo ora il limite per h tendente a 0 del rapporto incrementale:
$\lim_{h\to 0} \frac{3h^2+7h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3h+7)}{h} = \lim_{h\to 0}(3h+7) =$
$3 \cdot 0 + 7 = 7$

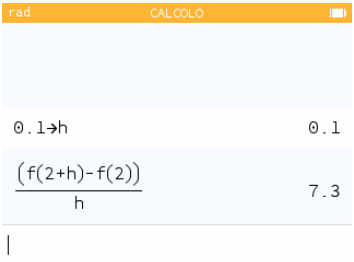
Controllo il risultato sulla calcolatrice grafica NumWorks.

2. Calcoliamo nell'applicazione **Calcolo** il rapporto incrementale per un valori sempre più piccoli di h
   Nell'applicazione **Funzioni** dichiariamo la funzione $f(x)$

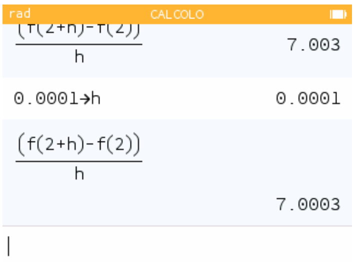


Nell'applicazione **Calcolo** assegniamo al parametro h un valore molto basso, ad esempio 0,1, in virtù del fatto che dobbiamo stimare il valore del limite per h tendente a 0.
*(**NB**: Per farlo, digitare il valore che si vuole assegnare a h, ad esempio 0,01, e premere i tasti* shift *e* sto→ F x^y*. Una volta comparsa la freccetta, digitate h premendo prima il tasto* ALPHA alpha *e, successivamente il tasto* OK*. Confermate premendo* OK*).*

Calcoliamo poi il valore del rapporto incrementale: $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$



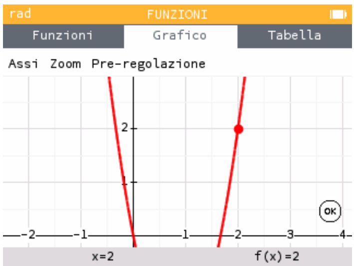
Assegniamo poi ad **h** un valore sempre più piccolo, ad esempio 0,01, poi 0,001, poi 0,0001 e osserviamo come, più h è "piccolo" e più il valore del rapporto incrementale si avvicina a 7.



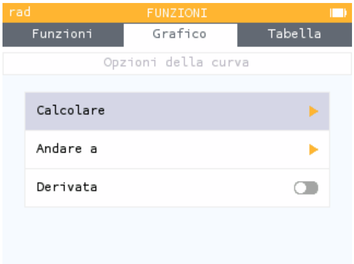
Suggerimento: Non è necessario digitare ogni volta il rapporto incrementale o il comando di assegnazione del parametro h. Ci si può muovere con △ e poi premere OK per riprendere la riga desiderata, modificarla a piacere e poi premere OK per dare conferma.

3. Calcoliamo nell'applicazione **Funzioni** la retta tangente nel punto di ascissa desiderato

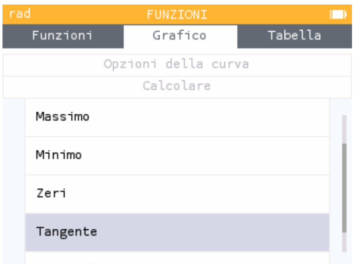
Nell'applicazione **Funzioni** tracciamo il grafico della funzione e ci posizioniamo sul punto di ascissa x=2.



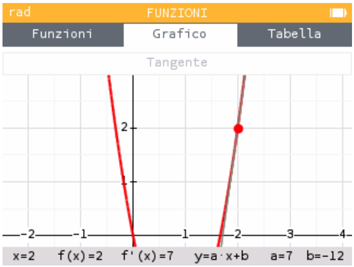
Premiamo OK e selezioniamo **Calcolare**



e poi **Tangente**.



Osserviamo che il coefficiente angolare della retta tangente è proprio 7

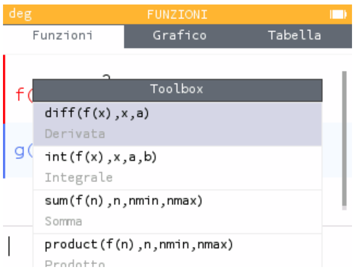


*(**NB**: L'esercizio A è con la stessa funzione di questo esercizio svolto, pertanto, per ottenere l'equazione e il grafico della retta tangente a $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = \frac{5}{6}$ è possibile muoversi con la freccia verso sinistra fino a raggiungere il punto desiderato, oppure digitare "5/6" sulla tastiera e premere OK).*

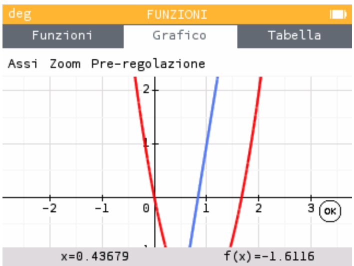
4. Calcoliamo nell'applicazione **Funzioni** il valore della funzione derivata nel punto di ascissa desiderato

Nell'applicazione **Funzioni**, nella scheda *Funzioni* aggiungiamo una funzione e premiamo il tasto ,

selezioniamo *Calcolo* e poi selezioniamo il comando *diff(f(x),x,a)*.

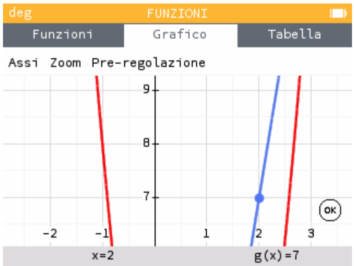


Scriviamo *diff(f(x),x,x)* e tracciamo il grafico:



Ci muoviamo con le frecce △ e ▽ per passare da una funzione all'altra.
Quando siamo sulla funzione g(x) possiamo muoverci con le frecce per andare al punto di ascissa 2, oppure > digitare *2* sulla tastiera e dare conferma con il tasto OK. Vediamo che g(2)=7, ovvero la derivata prima della

funzione f(x) nel punto di ascissa x0=2 è proprio 7.



*(**NB**: Potremmo anche semplicemente inserire la funzione $f(x)$, tracciarne il grafico, premere il tasto OK, selezionare Derivata e confermmare con OK. Una volta giallo il simbolo a fianco alla dicitura Derivata, premere il tasto ↩ e si potrà osservare che in basso, nella banda grigia, comparirà anche il valore della derivata prima nel punto. A questo punto, premendo il tasto 2il cursore ci porta nel punto di ascissa pari a 2, in cui la derivata prima è effettivamente pari a 7).*

3.3 Esercizi aggiuntivi

Per ciascuna delle seguenti funzioni:

1. Calcola $f'(x0)$ "a mano" utilizzando il limite del rapporto incrementale, poi controlla il risultato sulla calcolatrice grafica
2. Calcola, nell'applicazione **Calcolo**, il rapporto incrementale per valori sempre più piccoli di h
3. Calcola, nell'applicazione **Funzioni**, la retta tangente nel punto di ascissa desiderato
4. Calcola, nell'applicazione **Funzioni**, il valore della funzione derivata nel punto di ascissa desiderato

A) $f(x) = 3x^2 - 5x \qquad x_0 = \frac{5}{6}$

B) $g(x) = x^2 - 3x + 8 \qquad x_0 = -2 \qquad x_1 = 3$

C) $h(x) = -x^3 - 5x \qquad x_0 = 0$

D) $p(x) = \frac{2}{x-2} \qquad x_0 = 4$

E) $f_0(x) = \sqrt{x-1} \qquad x_0 = 1 \qquad x_1 = 2$

ATTENZIONE è importante aver selezionato nelle **Impostazioni** *Misura angolo* : *Radianti*, altrimenti non si potranno stimare correttamente i limiti con funzioni goniometriche.

F) $f_1(x) = 4\sin x \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$

G) $f_2(x) = -2\cos x \qquad x_0 = 2\pi$

H) $f_3(x) = \sin x + \pi \qquad x_0 = 0$

I) $f_4(x) = \sin x - \cos x \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$